La catégorie tannakienne des motifs purs sur un corps fini

Vincent ZOONEKYND
Sous la direction de George MALTSINIOTIS

Juin 1995

Résumé

Nous commencerons par rappeler des points de théorie de l'intersection afin d'effectuer certaines constructions sur les cycles. Puis nous donnerons une définition axiomatique des théories cohomologiques à partir desquelles nous batirons la catégorie des motifs. Nous démontrerons alors, suivant [Jan92], que cette catégorie, si elle est construite à partir des cycles n'est semi-simple que si l'on prend l'équivalence numérique. Nous regardons alors sous quelles conditions elle est tannakienne. Elle s'avèrera l'être si le corps de base est fini.

1 Introduction

1.1 Théories cohomologiques

En topologie algébrique, on dispose de nombreuses constructions d'une unique théorie cohomologique. En géométrie algébrique, au contraire, on dispose de différentes théories, selon le corps de base, et selon les corps sur lesquels on désire des espaces vectoriels.

1.2 Isomorphismes de périodes

On peut néanmoins, mais dans certains cas seulement, trouver des relations entre ces différentes cohomologies. Les motifs tentent de construire une théorie cohomologique qui engloberait toutes les cohomologies connues. On conjecture en effet que toute les cohomologies de Weil se factorisent par le foncteur $\mathfrak{V}_F \longrightarrow \mathfrak{M}_F$. On recherche donc une catégorie et un foncteur, universels parmi les théories cohomologiques.

1.3 Catégories tannakiennes

Le désir qui sous-tend la définition des catégorie tannakiennes est celui de retrouver un groupe à partir de la catégorie de ses représentations. Pour les groupes finis, on y parvient en considérant les caractères, *i.e.*, le groupe dual. Tannaka, [Tan39], l'a fait pour les groupes compacts, nous nous placerons dans le cadre de la géométrie algébrique. Une telle catégorie sera dite tannakienne neutre. En particulier, quand la catégorie des motifs sera tannakienne *neutre*, nous obtiendrons un groupe — le groupe de Galois motivique — dépendant du corps sur lequel les variétés sont construites. On peut même rafiner la construction et prendre la sous-catégorie tannakienne engendrée par un motif, et définir ainsi le groupe de Galois motivique du motif considéré.

2 Théorie de l'intersection

2.1 Anneau de Chow

Par *variété*, nous entendrons variété projective lisse [1] sur un corps F, par sous-variété, une sous-variété quelconque, non nécessairement lisse.

2.1.1 Cycles

Définition. — *Soit X une variété, on note $Z(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles. C'est le groupe des* cycles algébriques. *Il est muni d'une graduation : nous noterons $Z^i(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles de codimension i. Les* cycles premiers *sont les éléments de la base canonique de $Z(X)$.*

Définition. — *Définissons une relation d'ordre sur $Z(X)$ en disant que $\sum m_i Z_i \geqslant 0$, où les Z_i sont des cycles premiers, si tous les m_i sont positifs. $Z(X)$ est alors un treillis. On notera $|Z| = \sup\{-Z, Z\}$.*

Définition. — *Notons* supp $\sum m_i Z_i = \cup Z_i$ *le* support *du cycle $\sum m_i Z_i$, où tous les m_i sont non nuls.*

Définition. — *Une sous-variété Y de X est dite de* codimension pure *r si toute composante irréductible de Y est de codimension r dans X.*

Remarque. — Si X est de dimension m, $Z(X) = \bigoplus_{i=0}^m Z^i(X)$, et $Z^0(X) = \mathbb{Z}^I$, où I est l'ensemble des composantes irréductibles de X.

Définition. — *L'*augmentation $\varepsilon_X : Z(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est nulle sauf en degré 0, et*

$$\varepsilon_X|_{Z^0(X)} : \begin{cases} Z^0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sum m_i Z_i & \longmapsto & \sum m_i \end{cases}$$

Remarque. — Si X est pure de dimension m, $Z^m(X)$ est engendré par les points fermés de X. Notons $P = \operatorname{Spec} F$, l'augmentation $Z(P) = Z^0(P) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

1. C'est le lemme de Chow qui nous impose cette restriction

2.1.2 Cycle associé à une sous-variété

Définition. — *Soit Y une sous-variété de X de codimension r. Le* cycle associé *à Y est*

$$\sum_{\substack{W,\text{ composante irréductible de }Y\\ \text{de codimension } r \text{ dans } X}} \operatorname{long}(\mathcal{O}_{Y,\eta_W})W,$$

où η_W est le point générique de W.

2.1.3 Équivalence rationnelle

La notion de diviseur permet de traiter les problèmes d'intersection de courbes sur des surfaces. Nous désirons étendre cette notion pour des sous-variétés de codimension quelconque.

Les cycles ont été définis comme un groupe *libre*, qui ne contient donc pas beaucoup d'information sur la variété. Nous définissons maintenant un analogue de l'équivalence linéaire des diviseurs.

Définition. — *Soit V une sous-variété du schéma X, et $\tilde{V}$ sa normalisation*[2] *: $\tilde{V} \longrightarrow V \longrightarrow X$. L'image d'un diviseur de Weil de $\tilde{V}$ dans X donne naissance à un cycle. Si deux diviseurs sont linéairement équivalents, on dit que les cycles associés sont rationnellement équivalents. On prend la relation d'équivalence ainsi engendrée. On note $A(X)$ le groupe quotient.*

2.1.4 Définition de f_*

Définition. — *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, et Z une sous-variété irréductible de X. Si Z et $f(Z)$ on même dimension, on pose*

$$f_*(Z) = [F(Z) : F(f(Z))]\overline{f(Z)},$$

$f_*(Z) = 0$ sinon et on étend linéairement sur $A(X)$.

2.1.5 Axiomes d'une théorie de l'intersection

Nous aimerions disposer d'une opération algébrique sur les cycles qui reflète l'intersection de sous-variétés. Énonçons tout d'abord les propriétés que nous attendons d'une telle opération.

Définition. — *Une* théorie de l'intersection *sur une catégorie de schémas $\mathfrak{V}$ est la donnée, pour tout $X \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$ d'une application $A^r(X)\times A^s(X) \longrightarrow A^{r+s}(X)$, notée $(z_1, z_2) \longmapsto z_1 \cdot z_2$, sujette aux axiomes ci-après. On définit aussi, pour $f : X \longrightarrow Y$, $f_* : A(X) \longrightarrow A(Y)$, et pour f propre, on définit $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$ comme suit. Notons $\Gamma_f : Y \longrightarrow X\times Y$ le graphe de f et γ_f son image. Si W est une sous-variété irréductible de Y, posons*

$$f^*(W) = {\operatorname{pr}_1}_*(\gamma_f \cdot {\operatorname{pr}_2}^* W).$$

2. On normalise pour pouvoir parler de diviseur

(A1) $A(X)$ muni du produit d'intersection est un anneau commutatif, appelé *anneau de Chow.*

(A2) Les f^* sont des homomorphismes d'anneaux qui vérifient : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(A3) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme *propre*, f_* est un homomorphisme de groupes gradués. Ils vérifient : $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(A4) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme *propre*, f_* et f^* sont reliées par la relation de *projection* : $f_*(x \cdot f^* y) = f_* x \cdot y$.

(A5) Si $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ est l'application diagonale, et si Z et W sont des sous-variétés de X, on a : $Z \cdot W = \Delta^*(Z \times W)$.

(A6) Si Y et Z sont des sous-variétés de X qui s'intersectent proprement, *i.e.*les les composantes irréductibles W_j de $Y \cap Z$ sont de codimension $\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z$, leur produit d'intersection est donné par : $Y \cdot Z = \sum_j i(Y, Z, W_j)$. On dit que les $i(Y, Z, W_j)$ sont les *multiplicités d'intersection locale de Y et Z le long de W_j.*

(A7) Si Y est une sous-variété de X et Z un diviseur de Cartier effectif intersectant Y proprement, alors $Y \cdot Z$ est le cycle associé au diviseur de Cartier $Y \cap Z$ sur Y.

2.1.6 Théorie de l'intersection

Théorème. — ***Il existe une unique théorie de l'intersection pour les variétés quasi-projectives non singulières. Si X et Y sont des sous-variétés d'une telle variété V s'intersectant proprement, et si W est une composante irréductible de l'intersection de leurs supports, le produit d'intersection est donnée par :***

$$i(X, Y; W) = \sum_k (-1)^k \operatorname{long} \operatorname{Tor}_k (A/\mathfrak{a}, B/\mathfrak{b})$$

où $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont les idéaux de X et Y.

2.2 Constructions sur les cycles

Nous allons reprendre les constructions précédentes, non plus au niveau de l'anneau de Chow, mais directement au niveau des cycles, afin de construire d'autres relations d'équivalence. Commençons par rappeler des résultats élémentaires de géométrie algébrique, sans démonstration.

2.2.1 Diviseur de Weil

Proposition. — ***Soit Y un fermé irréductible de X, de codimension 1. Notons η son point canonique. Si $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est un anneau local noethérien intégralement clos, alors c'est un anneau de valuation discrète de $F(X)$, le corps des fractions de X.***

Proposition. — ***$f \in F(X)$ admet un zéro (respectivement un pôle) le long de Y si et seulement si $v_Y(f) > 0$ (respectivement $v_Y(f) < 0$). L'ensemble des fermés irréductibles Y tels que $v_Y(f) \neq$ est fini. On peut donc définir***

$$\operatorname{div} f = \sum_{Y \text{ cycle premier}} v_Y(f) Y \in Z^1(X).$$

Définition. — *L'application ainsi définie,* $\operatorname{div} : F(X)^\star \longrightarrow Z^1(X)$ *est un morphisme de groupes. Son conoyau sera noté* $\operatorname{Pic} X$*, c'est le groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire. Deux diviseurs Z_1 et Z_2 sont dits* linéairement équivalents *s'il existe $f \in F(X)$ telle que $Z_1 - Z_2 = \operatorname{div} f$. On notera $Z_1 \sim_{\mathrm{L}} Z_2$.*

2.2.2 Premières propriétés

2.2.3 Famille algébrique de cycles

Nous avons vu plus haut l'intérêt de quotienter $Z(X)$ par une relation d'équivalence. Construisons-en une inspirée de la notion de famille de variétés algébriques.

Définition. — *Soit X une variété irréductible et T une courbe irréductible. Soit $Z \in Z^p(X \times T)$ un cycle premier et $t \in T(F)$ Supposons que $Z \not\subset X \times \{t\}$ et notons $W_1, \ldots, W_r$ les composantes irréductibles de $Z \cap X \times \{t\}$. Notons f_i l'image dans $\mathcal{O}_{Z,W_i}$ d'un paramètre local de T en t, et $n_i = \operatorname{long} \mathcal{O}_{Z,W_i}/(f_i)$. Posons $Z(t) = \sum n_i W_i$. Cette définition s'étend à tout cycle sans composantes verticales. On dit alors que $\{Z(t)\}_{t \in T(F)}$ est une* famille algébrique de cycles *paramétrée par T.*

Définition. — *On dira que deux cycles W_1, W_2 de X sont* algébriquement équivalents *s'il existe une courbe irréductible T, une famille algébrique $\{Z(t)\}_{t \in T(F)}$ de cycles paramétrés par T, et $t_1, t_2 \in T(F)$ tels que $W_1 = Z(t_1)$ et $W_2 = Z(t_2)$. Si $T = \mathbb{P}^1$, on dira que W_1 et W_2 sont* rationnellement équivalents*.*

Proposition. — ***Ce sont des relations d'équivalence, compatibles à la structure de groupe gradué.***

Démonstration : Montrons que si $W_1 \sim W_1'$ et $W_2 \sim W_2'$, alors $W_1 + W_2 \sim W_1' + W_2'$. Soit T_1 un courbe irréductible, $Z_1 \in Z^p(X \times T_1)$, $t_1, t_2 \in T_1(F)$ tels que $Z(t_1) = W_1$, $Z(t_1') = W_1'$. De même pour W_2, W_2'. Il existe une courbe irréductible $T \subset T_1 \times T_2$ passant par (t_1, t_2) et (t_1', t_2'). (Dans le cas de l'équivalence rationnelle, on peut supposer que $T \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$) Posons alors $Y_1 = (Z_1 \times T_2) \cdot (X \times T)$, $Y_2 = (Z_2 \times T_1) \cdot (X \times T)$. $\{(Y_1 + Y_2)\}_{t \in T(F)}$ est alors une famille algébrique déformant $W_1 + W_2$ en $W_1' + W_2'$.

Si maintenant $W_1 \sim W_2$ et $W_2 \sim W_3$, on en déduit $W_1 + W_2 \sim W_2 + W_3$, donc $W_1 \sim W_3$. □

2.2.4 Multiplicité d'intersection

Pour un présentation plus détaillée, nous renvoyons à [Ful84] Soient Z et Z' des cycles premiers de codimension p, q sur une variété irréductible X. Supposons que Z et Z' s'intersectent proprement. Définissons $i(Z,Z';W)$.

Supposons d'abord que Z est localement une intersection complète au point générique de W, *i.e.*, l'idéal de Z dans $\mathcal{O}_{X,W}$ est engendré par exactement p éléments $F_1,\ldots,F_p$.

Soient $Y_1,\ldots,Y_n$ les cycles premiers corresspondant aux idéaux premiers de l'idéal de $\mathcal{O}_{X,W}$ engendré par F_1 et l'idéal de Z'. Posons $n_i = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{Z',Y_j}/(f_j))$, où f_j est l'image de F_j. Soit Y le cycle premier correspondant à l'idéal (premier) engendré par $F_2,\ldots,F_p$. Par récurence sur p, on peut supposer que $i(Y,Y_j;W)$ est défini, avec $i(X,Y_j;W)=1$. Posons alors $i(Z,Z';W)=\sum_{j=1}^{n} i(Y,y_j;W)n_j$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général, et procédons par réduction à la diagonale Δ de $X\times X$. Comme Δ est un sous-variété régulière d'une variété régulière, c'est localement une intersection complète. Soient $Y_1,\ldots,Y_m$ les composantes (réduites) irréductibles de $Z\times Z'$ qui contiennent $\delta(W)$, où $\delta : X \longrightarrow X\times X$ est l'application diagonale. Posons $n_j = \operatorname{long}\mathcal{O}_{Z\times Z',Y_j}$, puis $i(Z,Z';W)=\sum_{j=1}^{n} i(\Delta,Y_j;\delta(W))n_j$. Intuitivement, le second membre représente $i(\Delta,Y_j;\delta(W))$.

2.2.5 La formule du Tor

Théorème. — ***La formule du* Tor *nous donne bien la même multiplicité d'intersection que celle définie classiquement.***

Démonstration : Pour la démonstration, nous renvoyons à [Ser89]. Il s'agit de vérifier les axiomes du produit d'intersection, en utilisant les suite spectrales du Tor ; le produit d'intersection est alors défini de manière unique. □

2.2.6 Cycles s'intersectant proprement

Par variété, nous entendrons désormais variété quasi-projective lisse.

Définition. — *On dira que les cycles premiers Z_1 et Z_2 s'*intersectent proprement*, et on notera $Z_1 \pitchfork Z_2$, si toute composante irréductible de $Z_1\cap Z_2$ est de codimension* codim Z_1 + codim Z_2. *On étend aisément la définition à des cycles quelconques.*

Remarque. — Notons que
$Z \pitchfork Z'$ si et seulement si $Z' \pitchfork Z$;
$Z \pitchfork Z'$ si et seulement si $|Z| \pitchfork Z'$;
($Z \pitchfork Z_1$ et $Z \pitchfork Z_2$) si et seulement si $Z \pitchfork |Z_1|+|Z_2|$.

2.2.7 Produit d'intersection

Définition. — *Soient Z_1 et Z_2 des cycles premiers s'intersectant proprement. Posons*

$$Z_1\cdot Z_2 = \sum_{W \text{ composante irréductible de } Z_1\cap Z_2} i(Z_1,Z_2;W)\in Z(X)$$

On étend par linéarité aux cycles quelconques s'intersectant proprement.

Remarque. — Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une sous-variété lisse, et Z, Z' des cycles s'intersectant proprement tels que $\operatorname{supp} Z \cap \operatorname{supp} Z' \subset Y$. Alors, $Z \cdot Z' \in Z(Y) \xhookrightarrow{i_*} Z(X)$.

Le produit d'intersection, défini au niveau des cycles, vérifie les axiomes suivants.

(PI1) $\forall z \in Z(X) \quad 1_X \pitchfork z$ et $1_X \cdot z = z \cdot 1_X = z$

(PI2) $z_1 \cap z_2 \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(PI3) Si $z_1 \pitchfork z_2$ et $z_2 \pitchfork z_3$, alors $(z_1 \cdot z_2) \pitchfork z_3$ si et seulement si $z_1 \pitchfork (z_2 \cdot z_3)$. On a alors $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

(PI4) Soient $z_1 \in Z^{r_1}(X)$ et $z_2 \in Z^{r_2}(X)$, si $z_1 \pitchfork z_2$, alors $z_1 \cdot z_2 \in Z^{r_1+r_2}(X)$.

(PI5) Soient X_1, X_2 des variétés, $z_1, z_1' \in Z(X_1)$, $z_2, z_2' \in Z(X_2)$, supposons $z_1 \pitchfork z_1'$ et $z_2 \pitchfork z_2'$. Alors, $z_1 \times z_2 \pitchfork z_1' \times z_2'$ et $(z_1 \times z_2) \cdot (z_1' \times z_2') = (z_1 \cdot z_1') \times (z_2 \cdot z_2')$.

2.2.8 Image réciproque

Définition. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$. Posons $\Gamma_f = (\mathrm{Id}_X, f) : X \longrightarrow X \times Y$, c'est une immersion fermée. Remarquons que $f = \mathrm{pr}_2 \circ \Gamma_f$. Notons γ_f le cycle associé à l'image de Γ_f. Soit Z un cycle de Y. Si $1_X \times Z \pitchfork \gamma_f$, ce que l'on notera $Z \pitchfork f$, alors Z admet une image réciproque par f :*

$$f^* Z = \mathrm{pr}_{1*}((1_X \times Z) \cdot \gamma_f)$$

L'image réciproque vérifie les axiomes suivants.

(IR1) Soit $f : Z \longrightarrow Y$, alors $f \pitchfork 1_Y$ et $f^*(1_Y) = 1_X$.

(IR2) Soient $z_1, z_2 \in Z(Y)$ tels que $z_1 \pitchfork z_2$, $z_1 \pitchfork f$ et $z_2 \pitchfork f$. Alors $f^* z_1 \pitchfork f^* z_2$ si et seulement si $f \pitchfork z_1 \cdot z_2$, et dans ce cas $f^*(z_1 \cdot z_2) = f^* z_1 \cdot f^* z_2$.

(IR3) Si $z \in Z(X)$, $\mathrm{Id}_X \pitchfork z$ et ${\mathrm{Id}_X}^* z = z$.

(IR4) Soient $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$ et $z \in Z(X_3)$ tel que $f_2 \pitchfork z$. Alors $f \pitchfork f_2^* z$ si et seulement si $f_1 f_2 \pitchfork z$, et sous ces conditions $(f_2 f_1)^* z = f_2^* f_1^* z$.

(IR5) Si $z \in Z^r(Y)$ et $f \pitchfork z$, alors $f^* z \in Z^r(X)$.

(IR6) Soient $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$, et $z_i \in Z(Y_i)$ tels que $z_i \pitchfork f_i$, Alors $z_1 \times z_2 \pitchfork f_1 \times f_2$ et $(f_1 \times f_2)^*(z_1 \times z_2) = f_1^* z_1 \times f_2^* z_2$.

(IR7) Soit $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ l'application diagonale et $z_1, z_2 \in Z(X)$. $\Delta \pitchfork z_1 \times z_2$ si et seulement si $z_1 \pitchfork z_2$, et alors $z_1 \cdot z_2 = \Delta^*(z_1 \times z_2)$

(Ir8) Soient $X_1, \ldots, X_m$ des variétés, et $X = \coprod X_i$. Les application $k_i : X_i \longrightarrow X$ induisent $k_{i*} : Z(X_i) \longrightarrow Z(X)$, puis $k_* : \bigoplus Z(X_i) \longrightarrow Z(X)$. Pour tout $z \in Z(X)$, $z \pitchfork k_i$, donc on peut définir $k_i^* : Z(X) \longrightarrow Z(X_i)$, puis $k^* : Z(X) \longrightarrow \bigoplus Z(X_i)$. k_* et k^* sont des applications réciproques l'une de l'autre.

(Ir9) Soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un morphisme *propre*. Soient $z_1 \in Z(X_1)$, $z_2 \in Z(X_2)$, tels que $f_* z_1 \pitchfork z_2$, $f \pitchfork z_2$ et $z_1 \pitchfork f^* z$. Alors, $f_*(z_1 \cdot f^* z_2) = f_* z_1 \cdot z_2$.

2.2.9 Image directe

Nous considérons des variétés quasi-projectives lisses sur le corps F.

Si $z_1 \pitchfork z_2$, alors $z_1 \cdot z_2$ est défini.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Notons $\Gamma_f : X \longrightarrow X \times Y$ le graphe de f et γ_f son image. $f^* : Z(Y) \dashrightarrow Z(Y)$ est partiellement définie. $z \in Z(Y)$ admet une image réciproque par f si et seulement si $\gamma_f \pitchfork 1_X \times Z$, et alors $f^* z = \mathrm{pr}_{1*}(\gamma_f \cdot 1_X \times Z)$.

2.3 Relation d'équivalence admissible

2.3.1 Définitions

Définition. — *Notons $\mathfrak{V}$ la catégorie des variété quasi-projectives lisses sur F. Soit X un objet de $\mathfrak{V}$ et $\sim_X$ une relation d'équivalence sur $Z(X)$, compatible avec la structure de groupe gradué de $Z(X)$,* i.e., *$\{z \in Z(X) \ : \ z \sim_X 0\}$ est un sous-groupe gradué de $Z(X)$. On dira que $\sim_X$ est une relation d'équivalemce* admissible *si elle vérifie les axiomes suivants.*

(Adm1) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathfrak{V}$, $z_1, z_2 \in Z(Y)$ tels que $z_1 \sim_Y z_2$, $f \pitchfork z_1$, $f \pitchfork z_2$. Alors $f^* z_1 \sim_X f^* z_2$.

(Adm2) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme *propre* dans $\mathfrak{V}$, $z_1, z_2 \in Z(X)$ avec $z_1 \sim_Y z_2$. Alors $f_* z_1 \sim_Y f_* z_2$.

(Adm3) Soient $X_1, X_2 \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$, $z_1, z_1' \in Z(X_1)$, $z_2, z_2' \in Z(X_2)$ avec $z_1 \sim_{X_1} z_1'$, $z_2 \sim_{X_2} z_2'$. Alors $z_1 \times z_2 \sim_{X_1 \times X_2} z_1' \times z_2'$.

(Adm4) Dans le cas de $P = \mathrm{Spec}\, F$, $\sim_P = \mathrm{Id}_P$.

(Adm5) Soient $X \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$, $z_1, z_2 \in Z(X)$. Alors il existe $z_2' \in Z(X)$ tel que $z_2' \sim_X z_2$ et $z_1 \pitchfork z_2'$.

Remarque. — Si l'on relève la condition (Adm4), on obtient ce que Kleimann ([Kle72], [Kle68]) appelle une relation d'équivalence *adéquate*.

Notation. — Nous noterons maintenant $\mathsf{cl}_X : Z(X) \longrightarrow A(X)$ l'application de cycles

2.3.2 Premières propriétés

Proposition. — *Soit $X \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$ et $z_1, \ldots, z_m, z \in Z(X)$. Alors, il existe $z' \in Z(X)$, $z' \sim_X z$ tel que $\forall i \quad z_i \pitchfork z$.*

Proposition. (Image réciproque) — *Soit $f : X \longrightarrow Y$. f^* est définie sur tout $A(X)$, elle est de degré 0. On a un foncteur*

$$(A, \cdot^*) : \begin{cases} \mathfrak{V}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathfrak{Mod}_{\mathrm{gr}}\,\mathbb{Z} \\ X & \longmapsto & A(X) \\ f & \longmapsto & f^* \end{cases}$$

Proposition. (Image directe) — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme* propre*. On peut définir $f_* : A(X) \longrightarrow A(Y)$. Notons $\mathfrak{V}_0$ la sous-catégorie de $\mathfrak{V}$ ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes* propres*. On a un foncteur :*

$$(A, \cdot_*) : \begin{cases} \mathfrak{V}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{Mod}\ Z \\ X & \longmapsto & A(X) \\ f & \longmapsto & f_* \end{cases}$$

Si X et Y sont purs *de dimension m et n, f_* est un morphisme de degré $n - m$.*

Proposition. (Produit cartésien) — *Les foncteurs suivants sont faiblement monoïdaux symétriques.*

$$(\mathfrak{V}^{\mathrm{op}}, \times, P) \xrightarrow{((A, \cdot^*), \psi, \varepsilon_P)} (\mathfrak{Mod}_{\mathrm{gr}}\,\mathbb{Z}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$$

$$(\mathfrak{V}_0, \times, P) \xrightarrow{((A, \cdot_*), \psi, \varepsilon_P)} (\mathfrak{Mod}\,\mathbb{Z}, \otimes, \mathbb{Z})$$

2.3.3 Produit d'intersection

Proposition. — *Le produit d'intersection est partout défini sur $A(X)$.*

Démonstration : Soit $X \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$. Notons $\Delta : X : \longrightarrow X \times X$. Soient $z_1, z_1', z_2, z_2' \in Z(X)$ tels que $z_1 \pitchfork z_2$, $z_1' \pitchfork z_2'$, $z_1 \sim_X z_1'$ et $z_2 \sim_X z_2'$. On a donc $z_1 \times z_2 \sim_{X \times X} z_1' \times z_2'$. Comme $\Delta \pitchfork z_1 \times z_2$ et $\Delta \pitchfork z_1' \times z_2'$, on peut définir $z_1 \cdot z_2 = \delta^*(z_1 \times z_2)$, $z_1' \cdot z_2' = \delta^*(z_1' \times z_2')$. Comme $\sim_X$ est une relation d'équivalence admissible, on a $z_1 \cdot z_2 \sim_X z_1' \cdot z_2'$, et de plus ce produit est défini partout. □

Proposition. — *$A(X)$ est un anneau gradué.*
Soit $f : X \longrightarrow Y$, $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$ est un morphisme d'anneaux gradués.
Soient $X_1, X_2 \in \mathsf{Ob}\,\mathfrak{V}$, $A(X_1) \otimes A(X_2) \longrightarrow A(X_1 \times X_2)$ est un morphisme d'anneaux gradués.

2.3.4 Formule de projection

Proposition. — ***L'image directe ne respecte pas le produit. Plus précisément, soient $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un morphisme* propre*, $z_1 \in A(X_1)$, $z_2 \in A(X_2)$. On a***

$$f_*(z_1 \cdot f^* z_2) = f_* z_1 \cdot z_2.$$

Démonstration : Le résultat est valable sur les cycles dès que $f_* z_1 \pitchfork z_2$, $f \pitchfork z_2$, $z_1 \pitchfork f^* z_2$. Comme il s'agit d'une relation d'équivalence admissible, nous pouvons supposer le premier point de (Ir9) acquis, pour le deuxième on peut construire s tel que $s \pitchfork z_2$, et pour le troisième on peut construire t tel que $t \pitchfork f^* z_2$. □

2.3.5 Le lemme de Chow

Le théorème suivant ([Cho56], [Rob72]) permettra de démontrer que l'équivalence rationnelle permet bien de définir l'anneau de Chow, *i.e.*, la multiplication sera définie partout dans $A(X)$.

Théorème. — ***Soient W, W' des cycles sur X. Il existe $W'' \sim W'$ tel que $W \cdot W''$ soit défini. De plus, il existe une famille algébrique $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{P}^1(F)}$ transformant W' en W et telle que $Z(t) \cdot W$ soit défini pour presque tout t.***

2.3.6 Exemples de relations admissibles

Soient S, X des variétés quasi-projectives lisses.

Définition. — *Une* famille de cycles algébriques *sur X indexée par S est la donnée d'un cycle $z \in Z(X \times S)$, $z = \sum m_i z_i$, $m_i \neq 0$, tel que les $\overline{\mathrm{pr}_{2*} z_i}$ soient des composantes connexes de S. Cela revient à demander que pour tout point fermé s, $z \pitchfork 1_X \times s$. On peut alors définir, si $s : P \longrightarrow S$, $z(s) = \mathrm{pr}_{1*}((1_X \times s) \cdot z)$,* i.e., *$z(s) = (1_X \times s)^*(z)$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X \times s"] \arrow[d] & X \times S \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
P \arrow[r, "s"'] & S
\end{tikzcd}$$

Définition. — *On dit que deux cycles W_1, W_2 sont* rationnellement *(respectivement* algébriquement*) équivalents s'il existe une famille algébrique de cycles indexée par $\mathbb{P}^1$ (respectivement par une variété quasi-projective lisse S) transformant W_1 en W_2. On notera $W_1 \sim_{\mathrm{rat}} W_2$ (respectivement $W_1 \sim_{\mathrm{alg}} W_2$).*

Théorème. — ***$\sim_{\mathrm{rat}}$ et $\sim_{\mathrm{alg}}$ sont des relations d'équivalence admissibles.***

Démonstration : Admis. Ce sont des manipulations formelles, la difficulté résidant dans le lemme de Chow. □

Remarque. — Dans la définition de $\sim_{\text{rat}}$ on peut remplacer $\mathbb{P}^1$ par n'importe quelle variété rationnelle de $\mathfrak{V}$. De même, pour $\sim_{\text{alg}}$, on peut prendre des variétés algébriques projectives lisses irréductibles.

Remarque. — On peut donner une autre définition de $\sim_{\text{rat}}$. C'est la relation d'équivalence sur $Z(X)$ compatible avec la structure de groupe engendrée par la relation suivante. Soit W une sous-variété fermée, intègre de X et $\tilde{W}$ sa normalisée.

$$\tilde{W} \xrightarrow{\pi_W} W \xhookrightarrow{i_W} X$$

Soient $z_1, z_2 \in Z^1(X)$ des diviseurs de Weil linéairement équivalents, *i.e.*, il existe une fonction rationnelle f sur $\tilde{W}$ telle que $z_1 - z_2 = \operatorname{div} f$. $(i_W \pi_W)_* z_1$ et $(i_W \pi_W)_* z_2$ sont alors équivalents.

Exemples. — On vérifie aisément que les relations d'équivalence suivantes sont admissibles.

(i) Soit H un théorie cohomologique généralisée (voir plus bas), admettant une application de cycles. On définit la relation d'*équivalence homologique* ainsi : $z_1 \sim_{\text{hom}} z_2$ si et seulement si $\mathsf{cl}\, z_1 = \mathsf{cl}\, z_2$.

(ii) Deux cycles z_1, $z_2 \in Z(X)$ sont dits *numériquement équivalents*, $z_1 \sim_{\text{num}} z_2$ si et seulement si $\forall z \in Z(X)$ $\langle z \cdot z_1 \rangle = \langle z \cdot z_2 \rangle$.

(iii) L'équivalence de torsion (ou τ-équivalence) est ainsi définie : $z_1 \sim_\tau z_2$ si et seulement si il existe un entier n tel que $z_1^n \sim_{\text{rat}} z_2^n$.

Lemme. — ***Sur $\mathbb{P}^1$, tous les points sont équivalents pour toute relation d'équivalence admissible.***

Démonstration : Soient d'abord $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$. Il existe un cycle $z = \sum n_i z_i$ équivalent à x tel que $x \cdot z$ soit défini, *i.e.*, $x \neq z_i$ pour tout i. Construisons une fonction $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z_i) = z_i$. Par exemple, on peut prendre x, y, z_i à distance finie et poser $\varphi(T) = T + (y - x)\dfrac{f(T)}{f(x)}$, où $f(T)$ est le produit des polynômes minimaux des z_i. On a alors $\varphi_*(x) \sim \varphi_*(z)$, donc $y \sim z$, donc $y \sim x$.

Prenons maintenant w un point fermé et montrons que $w \sim dx$ où x est un point rationnel quelconque et $d = [F(w) : F]$. On peut supposer w à distance finie, et prendre $x = 0$. Posons alors $P(S, T) = S^d + a_{d-1}TS^{d-1} + \cdots + a_0 T$, où $P(S, 1)$ est le polynôme minimal de w. Cela définit une famille algébrique $\{z(t)\}_{t \in \mathbb{P}^1}$, qui déforme w en dx.

Il suffit désormais de voir que comme $\mathsf{cl}_{\mathbb{P}^1} t$ est indépendant du point rationnel t, il en va de même pour $\mathsf{cl}_{\mathbb{P}^1} z(t)$. En effet, $\mathsf{cl}_X\, z(t) = \mathrm{pr}_{2*} \mathsf{cl}_X (Z \cdot \mathrm{pr}_1{}^* t) = \mathrm{pr}_{2*}(\mathsf{cl}_X \cdot \mathsf{cl}_X\, t)$. On peut alors conclure. □

Remarque. — On a utilisé deux choses,

$$\mathsf{cl}_X\, f^* z = f^* \,\mathsf{cl}_Y\, z,$$

$$\mathsf{cl}_X(a \cdot b) = \mathsf{cl}_X(a) \cdot \mathsf{cl}_X(b).$$

La première vient du fait que l'on a une relation d'équivalence admissible, pour la deuxième, soit d'abord $\delta : X \longrightarrow X \times X$ l'application diagonale.

$$\begin{aligned}
\delta^*(a \times b) &= \delta^*(a \times 1 \cdot 1 \times b) \\
&= \delta^* \,\mathrm{pr}_1{}^*\, a \cdot \delta^* \,\mathrm{pr}_2{}^*\, b \\
&= a \cdot b \\
\mathsf{cl}_X(z \cdot w) &= \delta^*(\mathsf{cl}_X\, z \times \mathsf{cl}_X\, w) \\
&= \delta^* \,\mathsf{cl}_{X \times X}(z \times w) \\
&= \mathsf{cl}_X\, \delta^*(z \times w) \\
&= \mathsf{cl}_X(z \cdot w)
\end{aligned}$$

Proposition. — ***La relation d'équivalence est la plus fine des relations admissibles.***

Démonstration : Soient z_1 et z_2 des cycles rationnellement équivalents. Il existe une famille de cycles algébriques z, indexée par $\mathbb{P}^1$, et des points rationnels s_1 et s_2 de $\mathbb{P}^1$, tels que $z_1 = z(s_1)$ et $z_2 = z(s_2)$. Mais $s_1 \sim s_2$ (pour toute relation d'équivalence. Comme $z(s) = \mathrm{pr}_{1*}(z \cdot 1_{H(X)} \times s)$, on en déduit que $z_1 \sim z_2$. □

Proposition. — ***L'équivalence numérique est la relation d'équivalence la moins fine.***

Démonstration : Notons $A(X)$ la théorie de cohomologie des cycles modulo une relation d'équivalence admissible, et A_{num} celle correspondant à l'équivalence numérique. Construisons une application $A(X) \longrightarrow A_{\mathrm{num}}$. Il suffit de remarquer que $\langle Z \cdot W \rangle = \langle \mathsf{cl}\, Z \cdot \mathsf{cl}\, W \rangle$, c'est donc indépendant du choix de Z et W dans $\mathsf{cl}\, X$ et $\mathsf{cl}\, W$, l'application canonique $C(X) \longrightarrow A_{\mathrm{num}}$ passe donc au quotient. □

3 Cohomologies

3.1 Théorie cohomologique généralisée

Nous donnons brièvement ici une définition axiomatique d'une théorie cohomologique généralisée, ainsi que les principales propriétés dont elle peut jouir ([Kle72], [SR72])

On se donne une catégorie $\mathfrak{V}$ de variétés algébriques et un anneau commutatif Λ. Notons $\mathfrak{A}(\Lambda)$ la catégorie des Λ-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, anticommutatives (*i.e.*, si a et b sont homogènes de degrés p, q, $ab = (-1)^{pq} ba$) et augmentées. Une théorie cohomologique généralisée est la donnée d'un foncteur contravariant $H : \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{A}(\Lambda)$, et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme $f_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ vérifiant les axiomes énoncés ci après. On notera généralement f^* pour $H(f)$.

(Projection) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, et x, y des éléments de $H(X)$, $H(Y)$, on a : $f_* x \cdot y = f_*(x \cdot f^* y)$.

(Somme) Si $X = X_1 \sqcup X_2$, et si i_1 et i_2 dénotent les inclusions canoniques, alors ${i_1}^* \oplus {i_2}^* : H(X) \longrightarrow H(X_1) \oplus H(X_2)$ est un isomorphisme, dont l'inverse est (i_{1*}, i_{2*}).

(Produit) Si $X = X_1 \times X_2$, et si pr_1 et pr_2 dénotent les projections canoniques, ${\mathrm{pr}_1}^* \otimes {\mathrm{pr}_2}^* : H(X_1) \otimes H(X_2) \longrightarrow H(X)$. Notons $x_1 \times x_2$ l'image de $x_1 \otimes x_2$ dans $H(X)$. et donnons-nous des morphismes $\varphi_i : Y_i \longrightarrow X_i$. On a alors :

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_1 \times x_2) = {\varphi_1}^* x_1 \times {\varphi_2}^* x_2$$

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)_*(y_1 \times y_2) = \varphi_{1*} y_1 \times \varphi_{2*} y_2$$

(Augmentation) L'augmentation $H(\mathrm{Spec}\ F) \longrightarrow \Lambda$ est un isomorphisme.

Une théorie cohomologique généralisée est susceptible d'avoir certaines propriétés supplémentaires.

(Künneth) On a un isomorphisme :

$$H(X \times Y) \xrightarrow{{\mathrm{pr}_X}^* \otimes {\mathrm{pr}_Y}^*} H(X) \otimes H(Y)$$

(Poincaré) Définissons l'application degré comme étant la composée

$$H(X) \xrightarrow{\varphi^*} H(\mathrm{Spec}\ F) \xrightarrow[\simeq]{a} \Lambda,$$

et notons-la $\langle \cdot \rangle$. L'axiome de Poincaré demande que l'accouplement défini par $\left\{ \begin{array}{ccc} H(X) \otimes H(X) & \longrightarrow & \Lambda \\ x \otimes y & \longmapsto & \langle x \cdot y \rangle \end{array} \right.$ soit non dégénéré.

(Cycle) On a une application $\mathsf{cl}_X : A(X) \longrightarrow H(X)$ qui commute avec f^* et f_*, *i.e.*, pour $Y \xrightarrow{\varphi} X$:

$$\varphi^* \, \mathsf{cl}_X = \mathsf{cl}_Y \, \varphi^*,$$

$$\varphi_* \, \mathsf{cl}_Y = \mathsf{cl}_X \, \varphi_*.$$

On demande une certaine compatibilité avec le produit et la somme :

$$\mathsf{cl}_{X \times Y}(Z \times W) = \mathsf{cl}_X \, Z \otimes \mathsf{cl}_Y \, W$$

$$\mathsf{cl}_{X \sqcup Y}(Z \sqcup W) = \mathsf{cl}_X \, Z \oplus \mathsf{cl}_Y \, W$$

On demande enfin la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} A(\mathrm{Spec}\ F) \arrow[r, "\mathsf{cl}_{\mathrm{Spec}\ F}"] \arrow[d, "\simeq"'] & H(\mathrm{Spec}\ F) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \Lambda \end{tikzcd}$$

(Epu) On dira que notre théorie vérifie *E pluribus unum* si elle est munie d'une application de cycles telle que $\mathsf{cl}_X\, x$ ne dépende pas du choix du point rationnel x de X.

(Graduée) Une théorie sera dite *graduée* si les $H(X)$ sont en fait gradués par $\mathbb{N}$ d'une manière compatible avec la graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si les f^* est un morphisme gradué de degré 0, et si f_* est de degré $2(m-n)$. On demande aussi que les $H^i(X)$ soient nuls dès que i excède la dimension de X, que l'augmentation s'annule en degré non nul, et qu'elle établisse un isomorphisme entre $H^{2n}(X)$ et Λ. (C'est le morphisme d'intégration, qui correspond en fait à l'application degré.) S'il y a une application de cycles, elle envoie $A^i(X)$ dans $H^{2i}(X)$.

(Intersection) On dira qu'il s'agit d'une théorie globale de l'intersection si H est à valeur dans une catégorie d'algèbres commutatives.

(Weil) On parlera de théorie cohomologique de Weil pour une théorie graduée, possédant une application de cycle, vérifiant les axiomes de Kűnneth et de Poincaré, dans laquelle les $H^i(X)$ sont de dimension finie.

3.2 Premières propriétés d'une théorie cohomologique

Lemme. —

(i) ***Soit $p : X \times Y \longrightarrow Y$ la projection. Pour tous $a \in H(X)$, $b \in H(Y)$, on a $p_*(A \times b) = \langle a \rangle b$.***

(ii) ***Soit $\delta : X \longrightarrow X \times X$ l'application diagonale et $d_X = \delta_*(1_X)$. Si $d_X = \sum a_i \times b_i$, alors le Σ-module $H(X)$ est engendré par les b_i.***

Démonstration : (i) (Hazewinkel) Traitons d'abord le cas $X = P = \operatorname{Spec} F$. a s'écrit $a = \langle a \rangle 1_P$ et $p_* p^* = \mathrm{Id}_Y$. Donc $a \times b = \langle a \rangle (1_P \times b) = p^*(\langle a \rangle b)$. Dans le cas général, notons $\varphi : X \longrightarrow P$ le morphisme structurel. p est le composé

$$X \times Y \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{Id}_Y} P \times Y \xrightarrow{p} Y,$$

donc le résultat est établi.
(ii) Soit $c \in H(X)$. $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* c \cdot d) = \mathrm{pr}_{2*}\, \delta_*(\delta^*\, \mathrm{pr}_1{}^* c) = c$ d'après la formule de projection. Donc $c = \mathrm{pr}_{2*}(\sum (c \cdot a_i) \times b_i) = \sum \langle c \cdot a_i \rangle b_i$ d'après (i). □

3.3 Exemples

- La *cohomologie de De Rham* (en caractéristique 0) est définie comme l'hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles sur X ([Har74], [Gro66]).
$$H_{\text{De Rham}}(X) = \mathbb{H}(X, \Omega^\bullet)$$

– La cohomologie formelle ([MW68]) d'une variété définie sur un corps F de caractéristique positive est à valeurs dans un corps K, complet, à valuation discrète (*i.e.*, local), de caractéristique 0, de corps de classes résiduel F. Elle tente de généraliser la cohomologie de De Rham en caractéristique p.

– La cohomologie de Betti, si F est un sous-corps de $\mathbb{C}$, est la cohomologie singulière de la variété des points de X sur $\mathbb{C}$.

$$H_{\text{Betti}}(X) = H_{\text{singulière}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

– La cohomologie étale ([Mil80]) est à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$, où ℓ est premier à la caractéristique de F.

– La cohomologie cristalline ([Ber74]), définie en caractéristique p non nulle, est à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$.

– La cohomologie de Hodge,

$$H_{\text{Hodge}}(X) = \bigoplus_{p,q} H^q(X, \Omega^p_{X,F}).$$

– Les cycles modulo une relation d'équivalence admissible donnent naissance à une théorie cohomologique [3].

4 Construction des motifs

4.1 Correspondances

Nous allons élargir la catégorie $\mathfrak{V}_F$ à partir d'une théorie cohomologique H sur l'anneau Λ ([Ful84], [Kle72]). Par la suite, nous nous intéresserons tout particulièrement à la catégorie des motifs définie à partir des cycles sur $\mathbb{Q}$ (ou un corps k de caractéristique nulle) modulo l'équivalence numérique.

4.1.1 Correspondances

Soit Σ un sous anneau de Λ, et supposons donnés pour chaque X, Y, $S(X,Y)$ un sous-Σ-module de $H(X \times Y)$. On le suppose stable par les opérations suivantes.

(i) Si $f \in H(X \times Y)$ et $g \in H(Y \times Z)$, posons

$$g \circ f = \mathrm{pr}_{XZ*}(\mathrm{pr}_{XY}{}^* f \cdot \mathrm{pr}_{YZ}{}^* g) \in H(X \times Y)$$

(ii) $S(X, Y_1 \sqcup Y_2) = S(X, Y_1) \oplus S(X, Y_2)$ et $S(X_1 \sqcup X_2, Y) = S(X_1, Y) \oplus S(X_2, Y)$

3. Mais ce n'est [as une cohomologie de Weil, il manque l'isomorphisme de Kűnneth.

(iii) Si $f \in H(X \times Y)$ et $f' \in H(X' \times Y')$, posons

$$f \otimes f' = {\mathrm{pr}_{XY}}^* f \cdot {\mathrm{pr}_{X'Y'}}^* f' \in H(X \times X' \times Y \times Y')$$

(iv) Si $\varphi : Y \longrightarrow X$ est un morphisme dans $\mathfrak{V}_F$, posons $\Gamma_\varphi = (\varphi, \mathrm{Id}_Y) : Y \longrightarrow X \times Y$, puis

$$\bar{\varphi} = (\Gamma_\varphi)_*(1_{H(Y)}) \in H(X \times Y)$$

Exemple. — On peut simplement poser $S(X,Y) = H(X \times Y)$. Si H est graduée, S l'est aussi par $S^i(X,Y) = H^{i+2n}(X \times Y)$, où n est la dimension de X. On peut aussi prendre $S(X,Y) = H^{2n}(X \times Y)$. Si l'on dispose d'une application de cycles, on peut prendre l'image de $C(X \times Y) \otimes \Sigma$ ou de $C^n(X \times Y) \otimes \Sigma$. Rappelons que $C^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X)$ double le degré.

Remarque. — En appliquant le théorème de Kűnnethet la dualité de Poincaré, correspondances sont des éléments de

$$H(X \times Y) \simeq H(X) \otimes_\Lambda H(Y) \simeq \widecheck{H(X)} \otimes H(Y) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(H(X), H(Y)).$$

Ainsi $u \in H^{2n+d}(X \times Y)$ correspond à un morphisme homogène $H(X) \longrightarrow H(Y)$ de degré d.

Définition. — *La catégorie $S\mathfrak{V}_F$ des S-*correspondances *a pour objets les $\bar{X}$, pour tout schéma X, et pour morphismes les correspondances de X à Y. On vérifie que la composition définie ci-dessus est bien associative, Σ-linéaire. Les morphismes identité sont donnés par $d_Y = \delta_*(1)$, où $\delta : Y \longrightarrow T \times Y$ est l'application diagonale. On vérifie que $d_Y \circ f = f$ et $g \circ d_y = g$. C'est donc une catégorie Σ-linéaire, dont la somme directe est donnée par $\bar{X} \oplus \bar{Y} = \overline{X \sqcup Y}$, et même monoïdale, le produit tensoriel étant induit par $\bar{X} \otimes \bar{X} = \overline{X \times Y}$ et $\bar{f} \otimes \bar{f}' = \overline{f \otimes f'}$.*

Démonstration : Soient $a \in S(X_1, X_2)$, $b \in S(X_2, X_3)$, $c \in S(X_3, X_4)$ des correspondances.

$$\begin{aligned}
c \circ (b \circ a) &= {\mathrm{pr}^{134}_{14}}_*({\mathrm{pr}^{123}_{13}}_*(a \times 1_{X_3} \cdot 1_{X_1} \times b) \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times c) \\
&= {\mathrm{pr}^{134}_{14}}_*((\mathrm{pr}^{123}_{13} \times \mathrm{Id}_{X_4})_*(a \times 1_{X_3} \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times b \times 1_{X_4}) \cdot 1_{X_1} \times c) \\
&= ({\mathrm{pr}^{134}_{14}}_* \circ \mathrm{pr}^{123}_{13} \times \mathrm{Id}_{X_4})_*(a \times 1_{X_3} \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times b \times 1_{X_4} \cdot (\mathrm{pr}^{123}_{13} \times \mathrm{Id}_{X_4})^* 1_{X_1} \times c) \\
&= {\mathrm{pr}^{1234}_{14}}_*(a \times 1_{X_3} \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times b \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times 1_{X_2} \times c) \\
&= {\mathrm{pr}^{1234}_{14}}_*(\mathrm{pr}^{1234*}_{12}\, a \cdot \mathrm{pr}^{1234*}_{23}\, b \cdot \mathrm{pr}^{1234*}_{34}\, c) \\
(c \circ b) \circ a &= {\mathrm{pr}^{124}_{14}}_*(a \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_1} \times {\mathrm{pr}^{234}_{24}}_*(b \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_2} \times c)) \\
&= {\mathrm{pr}^{124}_{14}}_*(a \times 1_{X_4} \cdot (\mathrm{Id}_{X_1} \times \mathrm{pr}^{234}_{24})_*(b \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_2} \times c)) \\
&= (\mathrm{pr}^{124}_{14} \circ \mathrm{Id}_{X_1} \times \mathrm{pr}^{234}_{24})_*((\mathrm{Id}_{X_1} \times \mathrm{pr}^{234}_{4})^* a \times 1_{X_4} \cdot b \times 1_{X_4} \cdot 1_{X_2} \times c) \\
&= {\mathrm{pr}^{1234}_{14}}_*(\mathrm{pr}^{1234*}_{12}\, a \cdot \mathrm{pr}^{1234*}_{23}\, b \cdot \mathrm{pr}^{1234*}_{34}\, c)
\end{aligned}$$

Posons $\varphi = (\mathrm{Id}_X \times \delta) : X \times Y \longrightarrow X \times Y \times Y$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
d_Y \circ f &= \mathrm{pr}_{13*}({\mathrm{pr}_{12}}^* f \cdot \varphi_*(1)) \\
&= \mathrm{pr}_{12*}\, \varphi_*(\varphi^* {\mathrm{pr}_{12}}^* f \cdot 1) \\
&= f
\end{aligned}$$

De même, $\psi = \delta \times \mathrm{Id}_X : Y \times X \longrightarrow Y \times Y \times X$,

$$\begin{aligned} g \circ d_Y &= \mathrm{pr}_{13*}(\psi_*(1) \cdot \mathrm{pr}_{23}{}^* g) \\ &= \mathrm{pr}_{12*}\, \psi_*(1 \cdot \psi^* \,\mathrm{pr}_{23}{}^* g) \\ &= g \end{aligned}$$

□

Remarque. — On retiendra la formule de la composition de trois correspondances.

Proposition. — ***On peut définir un foncteur contravariant monoïdal***

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{V}_F & \longrightarrow & S\mathfrak{V}_F \\ X & \longmapsto & \bar{X} \\ \varphi & \longmapsto & \bar{\varphi} \end{array} \right.$$

Il suffit de vérifier que $\overline{\varphi \circ \psi} = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}$.

Démonstration : Considérons la situation suivante.

$$Z \xrightarrow{\ \psi\ } Y \xrightarrow{\ \varphi\ } X$$

Posons $\theta = \Gamma_f \times \mathrm{Id}_Z$, et remarquons $\mathrm{pr}_{Y \times Z} \circ \theta = \mathrm{Id}_{Y \times Z}$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Gamma_\psi"] \arrow[dr, "\Gamma_{\varphi\circ\psi}"'] & Y \times Z \arrow[r, "\theta"] & X \times Y \times Z \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{X\times Y}"] \\ & X \times Z & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi \circ \psi} &= \mathrm{pr}_{X\times Y}{}_*\, \theta_* \bar{\psi} \\ &= \mathrm{pr}_{X\times Z}{}_*\, \theta_*(1_{Y\times Z} \cdot \theta^* \,\mathrm{pr}_{Y\times Z}{}^* \,\bar{\psi}) \\ &= \mathrm{pr}_{X\times Z}{}_*(\theta_*(1_{Y\times X\times Z}) \cdot \mathrm{pr}_{Y\times Z}{}^* \,\bar{\psi}) \\ &= \mathrm{pr}_{X\times Z}{}_*(\bar{\varphi} \times 1_Z) \cdot \mathrm{pr}_{Y\times Z}{}^* \,\bar{\psi}) \\ &= \mathrm{pr}_{X\times Z}{}_*(\mathrm{pr}_{X\times Y}{}_*\, \bar{\varphi}) \cdot \mathrm{pr}_{Y\times Z}{}^* \,\bar{\psi}) \end{aligned}$$

□

Théorème. — ***Nous pouvons maintenant étendre le foncteur de cohomologie*** H ***aux correspondances. Il suffit de poser*** $T(\bar{X}) = H(X)$, ***et si*** $f \in S(X, Y) \subset H(X \times Y)$, ***nous définissons*** $T(f)$ ***ainsi:***

$$T(f) : \left\{ \begin{array}{rcl} H(X) & \longrightarrow & H(Y) \\ x & \longmapsto & \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot f) \end{array} \right.$$

T est linéaire et $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$. En vérifiant que $T(\bar{\varphi}) = \varphi^*$, on voit que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{V}_F \arrow[r] \arrow[dr, "H"'] & S\mathfrak{V}_F \arrow[d, "T"] \\ & \mathfrak{Mod}\ \Lambda \end{tikzcd}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
T(f \circ g)(x) &= \mathrm{pr}^{XZ}_{Z\,*}(\mathrm{pr}^{XZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ}_{XZ\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{YZ}\, f)) \\
&= \mathrm{pr}^{X\times Z}_{Z\,*}\, \mathrm{pr}^{XYZ}_{XY\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XZ}\, \mathrm{pr}^{XZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{YX}) \\
&= \mathrm{pr}^{X\times Y\times Z}_{Z\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{YX}) \\
T(g)(x) &= \mathrm{pr}^{XY}_{Y\,*}(\mathrm{pr}^{XY\,*}_{X}\, x \cdot g)\, \mathrm{pr}^{XYZ}_{Y\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g) \\
T(f) \circ T(g)(x) &= \mathrm{pr}^{XYZ}_{Z\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{Y}\, \mathrm{pr}^{XYZ}_{Y\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g) \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{YZ}\, f) \\
&= \mathrm{pr}^{XYZ}_{Z\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{X}\, x \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{XY}\, g \cdot \mathrm{pr}^{XYZ\,*}_{YZ}\, f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\bar{\varphi})(x) &= \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^*\, x \cdot \Gamma_{\varphi\,*}(1_{H(Y)})) \\
&= \mathrm{pr}_{2*}((\Gamma_\varphi{}^*\, \mathrm{pr}_1{}^*\, x) \cdot 1_{H(Y)}) \\
&= \varphi^* x
\end{aligned}$$

□

Proposition. — ***Le foncteur T est faiblement monoïdal:***

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{H(X) \otimes H(X')} \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{T(f) \otimes T(f')}"'] & \boldsymbol{H(X \times X')} \arrow[d, "\boldsymbol{T(f \otimes f')}"] \\ \boldsymbol{H(Y) \otimes H(Y')} \arrow[r] & \boldsymbol{H(Y \times Y')} \end{tikzcd}$$

Démonstration : Cela résulte du fait que les foncteurs $\cdot_*$ et $\cdot^*$ respectent le produit cartésien, et qu'il en va de même pour le produit d'intersection (par réduction à la diagonale).

$$
\begin{aligned}
T(f \otimes f')(x \otimes x') &= \mathrm{pr}_{YY'}^{XX'YY'}{}_*(\mathrm{pr}_{XX'}^{XX'YY'^*}\, x \otimes x' \cdot f \otimes f') \\
&= \mathrm{pr}_{YY'}^{XX'YY'}{}_*(\mathrm{pr}_{XX'}^{XX'YY'^*}(\mathrm{pr}_{X}^{XX'^*}\, x \cdot \mathrm{pr}_{X'}^{XX'}\, x') \cdot \mathrm{pr}_{XY}^{XX'YY'^*}\, f \cdot \mathrm{pr}_{X'Y'}^{XX'YY'}\, f') \\
&= \mathrm{pr}_{YY'}^{XX'YY'}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{XX'YY'^*}\, x \cdot \mathrm{pr}_{X'}^{XX'YY'^*} \cdot \mathrm{pr}_{XY}^{XX'YY'^*}\, f \cdot \mathrm{pr}_{X'Y'}^{XX'YY'}\, f') \\
T(f) \otimes T(f')(x \otimes x') &= T(f)(x) \otimes T(f')(x') \\
&= \mathrm{pr}_{Y}^{XY}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{XY^*}\, x \cdot f) \otimes \mathrm{pr}_{Y'}^{X'Y'}{}_*(\mathrm{pr}_{X'}^{X'Y'^*}\, x' \cdot f') \\
&= \mathrm{pr}_{Y}^{YY'^*}\, \mathrm{pr}_{Y}^{XY}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{XY^*}\, x \cdot f) \cdot \mathrm{pr}_{Y'}^{YY'^*}\, \mathrm{pr}_{X'}^{X'Y'}{}_*(\mathrm{pr}_{X'}^{X'Y'^*}\, x' \cdot f') \\
&= \mathrm{pr}_{YY'}^{XX'YY'}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{XX'YY'^*}\, x \cdot \mathrm{pr}_{XY}^{XX'YY'^*}\, f) \cdot \mathrm{pr}_{YY'}^{XX'YY'}{}_*(\mathrm{pr}_{X'}^{XX'YY'^*}\, x' \cdot \mathrm{pr}_{X'Y'}^{XX'YY'^*}\, f) \\
&= \mathrm{pr}_{YY'*}(\mathrm{pr}_{X}{}^*\, x \cdot \mathrm{pr}_{XY}{}^*\, f \cdot \mathrm{pr}_{YY'}{}^*\, \mathrm{pr}_{YY'*}(\mathrm{pr}_{X'}{}^*\, x' \cdot \mathrm{pr}_{X'Y'}{}^*\, f)) \\
&= \mathrm{pr}_{YY'*}(\mathrm{pr}_{X}{}^*\, x \cdot \mathrm{pr}_{X'}{}^* \cdot \mathrm{pr}_{XY}{}^*\, f \cdot \mathrm{pr}_{X'Y'}\, f')
\end{aligned}
$$

□

Proposition. — ***Si $f \in H(X \times Y)$, on notera ${}^t f \in H(Y \times X)$ son image canonique. Si ${}^t f \in S(X,Y)$, on a :***

$$T({}^t\varphi) = \varphi_*.$$

Soit $x \in H(X)$, considérons la multiplication par x

$$M_x : \left\{ \begin{array}{rcl} H(X) & \longrightarrow & H(X) \\ a & \longmapsto & ax \end{array} \right. ,$$

et $m_x = \delta_*(x)$, où $\delta : X \longrightarrow X \times X$. Si $m_x \in S(X,X)$, on a :

$$T(m_x) = M_x.$$

Démonstration : Comme précédemment, il suffit d'utiliser la formule de projection et la définition de $\bar\varphi$.

$$
\begin{aligned}
T({}^t\bar\varphi)(x) &= \mathrm{pr}_{Y}^{X \times Y}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{X \times Y^*}\, x \cdot {}^t\bar\varphi) \\
&= \mathrm{pr}_{Y}^{Y \times X}{}_*(\mathrm{pr}_{X}^{Y \times X^*} \cdot \Gamma_{\varphi *}(1_{H(X)})) \\
&= \mathrm{pr}_{Y}^{Y \times X}{}_*\, \Gamma_{\varphi *}(\Gamma_\varphi{}^*\, \mathrm{pr}_{X}^{Y \times X^*}\, x) \\
&= \varphi_*(x) \\
T(m_x)(a) &= \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^*\, a \cdot \delta_*(x)) \\
&= \mathrm{pr}_{2*}\, \delta_*(\delta^*\, \mathrm{pr}_1{}^*\, a \cdot x) \\
&= ax \\
&= M_x(a)
\end{aligned}
$$

□

4.1.2 Degrés

Remarque. — Rappelons les différentes graduations que nous avons définies, sur les cycles, en cohomologie et sur les correspondances.

- Les correspondances de degré i sont les images des éléments de $Z^{(n+i)}(X \times Y)$, où $n = \dim X$;
- l'application des cycles d'une catégorie cohomologiuque généralisée, cl : $A^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X)$;
- Si l'on construit les correspondances à partir d'une théorie cohomologique, on pose $S^i(X,Y) = H^{i+2n}(X \times Y)$ pour obtenir une théorie graduée, ou simplement $S(X,Y) = H^{2n}(X \times Y)$.

4.1.3 Quelques lemmes

Lemme. — ***Soit $f \in S(X,Y)$ une correspondance. Si $f = \sum a_i \times b_i$, alors pour tout $x \in H(X)$, $T(f)(x) = \sum \langle x \cdot a_i \rangle b_i$.***

Démonstration : Il suffit d'appliquer la définition et un lemme précédent.

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot f) \\ &= \sum \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot a_i \times b_i) \\ &= \sum \mathrm{pr}_{2*}((x \cdot a_i) \times b_i) \\ &= \sum \langle x \cdot a_i \rangle b_i \end{aligned}$$

□

Proposition. — ***Soit H une théorie cohomologique graduée, X une variété irréductible de dimension pure n, Y une variété quelconque. et $f \in S(X,Y)$.***

(i) Si $f \in H^q(X \times Y)$, $T(f)$ est homogène de degré $(q - 2n)$.

(ii) Si f est dans l'image de $H^{2n-i}(X) \otimes H^j(Y)$, $T(f)$ s'annule sur $H^p(X)$ dès que $p \neq i$, et $T(f)$ envoie $H^i(X)$ dans $H^j(X)$.

(iii) Supposons que d_X admette une décomposition de Kűnneth $d_X = \sum \pi^i$, où les π^i sont dans l'image de $H^{2n-i} \otimes H^i(X)$. Alors $T(\pi^i)$ est la projection $H(X) \longrightarrow H^i(X)$.

Démonstration : Soit $x \in H^p(X)$.
(*i*) Comme $(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot f) \in H^{p+q}(X \times Y)$, $T(f)(x) \in H^{p+q-2n}(Y)$.
(*ii*) Si $a \in H^p(X)$, $\langle x \cdot a \rangle = 0$ si $p + r \neq 2n$. Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent.
(*iii*) On applique encore le lemme. $T(\pi_i)(x) = 0$ si $p \neq i$, et $T(\pi_i)(x) = T(d_X)(x) = s$ si $p = i$. □

Remarque. — Cela donne alors un décomposition $h(X) = \bigoplus_1^{2n} h^i(X)$, puis un théorème de Kűnneth : $h^r(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=r} h^p(X) \otimes h^q(Y)$.

4.1.4 Extension de la base

Définition. — *Si $f : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ est une correspondance, posons*

$$f_S = d_X \otimes f : \bar{S} \otimes \bar{X} \longrightarrow \bar{S} \otimes \bar{Y}.$$

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathfrak{V}_F$, posons similairement

$$\varphi_S = d_S \times \varphi : S \times X \longrightarrow S \times Y.$$

Proposition. — ***Énonçons quelques propriétés de l'extension de base.***

(i) L'extension de base est fonctorielle $\mathfrak{V}_F \longrightarrow \mathfrak{V}_F$, et $S\mathfrak{V}_F \longrightarrow S\mathfrak{V}_F$;

(ii) L'extension de base commute au foncteur $\mathfrak{V}_F \longrightarrow S\mathfrak{V}_F$;

(iii) L'extension de base $S\mathfrak{V}_F \longrightarrow S\mathfrak{V}_F$ est compatible avec ${}^t\cdot$;

(iv) Si m_x est distingué, $T((m_x)_S) = M_{1\times x}$;

(v) $T((\bar{\varphi})_S) = \varphi_S{}^*$;

(vi) $T({}^t(\bar{\varphi})_S) = (\varphi_S)_*$.

Démonstration : (i) C'est évident : $(f \circ g)_S = \mathrm{Id}_{\bar{S}} \otimes (f \circ g) = (\mathrm{Id}_{\bar{S}} \otimes f) \circ (\mathrm{Id}_{\bar{S}} \otimes g)$.
(ii) On veut montrer que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}_F \arrow[r] \arrow[d] & S\mathfrak{V}_F \arrow[d] \\
\mathfrak{V}_F \arrow[r] & S\mathfrak{V}_F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\varphi})_S &= \mathrm{Id}_S \otimes (\Gamma_\varphi)_*(i_{H(Y)}) \\
\overline{\varphi_S} &= (s \circ \mathrm{Id}_S \times \mathrm{Id}_S \times \Gamma_\varphi)_*(1_{H(S\times Y)}) \\
&= s_* \circ (\mathrm{Id}_S \times (\mathrm{Id}_S \times \Gamma_\varphi))_*(1_{H(S\times Y)})
\end{aligned}$$

(iii) résulte simplement de la compatibilité (évidente) entre $\otimes$ et ${}^t\cdot$.
(iv) Comme T est un foncteur monoïdal,

$$\begin{aligned}
T((m_x)_S) &= T(\mathrm{Id}_S \otimes \delta_* x) \\
&= \mathrm{Id}_{H(S)} \otimes T(m_x) \\
&= \mathrm{Id}_{H(S)} \otimes M_x \\
&= M_{1\times x}
\end{aligned}$$

(v) car $\bar{\varphi}_S = \overline{\varphi_S}$ et $T(\bar{\varphi}) = \varphi^*$.
(vi) car $T({}^t\bar{\varphi}) = \varphi_*$ et $\bar{\varphi}_S = \overline{\varphi_S}$. □

4.1.5 Le principe d'identité de Manin

On peut déterminer si deux correspondances sont égales en les regardant après extension de base ([Man68]).

Lemme. — ***Notons $\boldsymbol{H = H^{\mathrm{pair}} \oplus H^{\mathrm{impair}}}$ la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\boldsymbol{H}$. Soient $\boldsymbol{X, Y}$ des variétés vérifiant la dualité de Poincaré $\boldsymbol{f \in S(X,Y)}$. Supposons $\boldsymbol{f \in H^{\mathrm{pair}}(X \times Y)}$ et $\boldsymbol{{}^t f \in S(Y,X)}$. Alors, pour tout $\boldsymbol{x \in H(X)}$ et tout $\boldsymbol{y \in H(Y)}$, $\boldsymbol{\langle x \cdot T({}^t f)(y)\rangle = \langle T(f)(x) \cdot y\rangle}$.***

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
T(f)(x)\cdot y &= (\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot f)) \cdot y \\
&= \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot f \cdot \mathrm{pr}_2{}^* y) \\
{}^t(x \cdot T({}^t f)(y)) &= {}^t(x \cdot \mathrm{pr}_X^{Y\times X}{}_*(\mathrm{pr}_Y^{Y\times X *}\, y \cdot f)) \\
&= {}^t(\,\mathrm{pr}_X^{Y\times X}{}_*(\mathrm{pr}_X^{Y\times X *}\, x \cdot \mathrm{pr}_Y^{Y\times X *}\, y \cdot f)) \\
&= \mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{pr}_1{}^* x \cdot \mathrm{pr}_2{}^* y \cdot f)
\end{aligned}
$$

Mais comme f est paire, ça commute. Prendre le degré revient à composer avec le morphisme structural, mais comme $\lambda_X \,\mathrm{pr}_X^{X\times Y} = \lambda_{X\times Y} = \lambda_Y \,\mathrm{pr}_Y^{X\times Y}$, on a bien égalité. □

Lemme. (Liebermann) — ***Considérons les correspondances***

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{W} & \\
\bar{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & \\
 & \bar{Y} \arrow[r, "g"'] & \bar{Z}
\end{tikzcd}
$$

Supposons que $\boldsymbol{f \in H^{\mathrm{pair}}(X \times W)}$ ou que $\boldsymbol{h \in H^{\mathrm{pair}}(X \times Y)}$. Alors $\boldsymbol{T(f \otimes g)(h) = g \circ h \circ {}^t f}$.

Démonstration : $f \in S(X,W)$, $g \in S(Y,Z)$, donc $f \otimes g \in S(X \times Y, W \times Z)$. Notons $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_{XY}^{XYWZ}$ et $\mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_{WZ}^{XYWZ}$. Appliquons alors la définition de T et celle de $f \otimes g$.

$$
\begin{aligned}
T(f\otimes g)(h) &= \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1{}^* h \cdot f \otimes g) \\
&= \mathrm{pr}_{WZ}^{XY\ WZ}{}_*(\mathrm{pr}_{XY}^{XYWZ*}\, h \cdot \mathrm{pr}_{XW}^{XYWZ*}\, f \cdot \mathrm{pr}_{YZ}^{XYWZ*}\, g)
\end{aligned}
$$

L'autre membre est simplement la composition de trois correspondances.

$$
g \circ h \circ {}^t f = \mathrm{pr}_{WZ}^{WXYZ}{}_*(\mathrm{pr}_{WX}^{WXYZ*}\, {}^t f \cdot \mathrm{pr}_{XY}^{WXYZ*}\, h \cdot \mathrm{pr}_{YZ}^{WXYZ*}\, g)
$$

□

Théorème. (Principe d'identité de Manin) — ***Considérons deux correspondances $\boldsymbol{f, g : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.***

(i) $\boldsymbol{f = g}$ ***(dans*** $\boldsymbol{S(X,Y)}$***) ;***

(ii) pour tout $\boldsymbol{S}$***,*** $\boldsymbol{T(f_S) = T(g_S)}$***. On dit parfois que l'égalité*** $\boldsymbol{T(f) = T(g)}$ ***est universelle ;***

(iii) $\boldsymbol{T(f_X) = T(g_X)}$***.***

Démonstration : D'après le lemme de Liebermann, comme d_S est un cycle de degré $\dim S$, donc une correspondance de degré 0, $T(g_S)(h) = g \circ h \circ {}^t d_S$ pour tout $h \in S(S \times X)$.

$$\begin{tikzcd} & S & \\ S \arrow[ur, "d_S"] \arrow[dr, "h"'] & & \\ & X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

En prenant $S = X$ et $h = d_X$, on trouve que (iii) entraîne (ii) :

$$\begin{aligned} T(g_X)(d_X) &= T(d_X \otimes g)(d_X) \\ &= g \circ d_X \circ {}^t d_X \\ &= g \end{aligned}$$

□

Remarque. — En d'autres termes, le foncteur d'extension de base par X, $S\mathfrak{V}_F \longrightarrow S\mathfrak{V}_F$, est pleinement fidèle.

Exemple. — Comme illustration du principe d'identité de Manin, montrons comment la comparaison de φ^* et φ_* mène à celle de ${}^t\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$. Soit $\varphi : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $\mathfrak{V}_F$, entre des variétés irréductibles de même dimension. Notons r le degré de φ, *i.e.*, $r = [F(Y) : F(X)]$. Pour tout $x \in H(X)$, $\varphi_*\varphi^*x = rx$. Mais on a aussi $\deg \varphi_X = r$, donc pour tout $z \in H(X \times X)$, $(\varphi_X)_*(\varphi_X)^*z = rz$, donc ${}^t\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi} = rd_X$. Si r est inversible dans X, on peut poser

$$p = r^{-1}\bar{\varphi} \circ {}^t\bar{\varphi},$$

c'est un projecteur de $S(X, X)$.

Exemple. — Pour d'autres exemples, au niveau des transformations monoïdales, voir [Man68], [Kle72].

4.2 Motifs effectifs

4.2.1 Catégories pseudo-abéliennes

Définition. — *On dit qu'un endomorphisme p de X dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un* projecteur *si $p^2 = p$.*

Définition. — *Une catégorie additive $\mathfrak{C}$ est dite* pseudo-abélienne *(ou* karoubienne*) si tout projecteur p d'un objet X de $\mathfrak{C}$ admet un noyau et une image, et si $X = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ ([SGA4],* I*.7.8 et* I*.8.7.8).*

Définition. — *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie additive. Construisons une catégorie $\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}$ comme suit. Ses objets sont les couples (X, p), où X est un objet de $\mathfrak{C}$ et p un projecteur de X. Les morphismes $(X, p) \longrightarrow (Y, q)$ sont les morphismes de $\mathfrak{C}$ $f : X \longrightarrow Y$ tels que $f \circ p = q \circ f$, modulo ceux tels que $f \circ p = 0$. Le morphisme identité de (X, p) est p.*

Remarque. — Il n'est pas nécessaire de se placer dans une catégorie additive pour faire ces constructions. On dit que Y est un facteur direct de X s'il existe un épimorphisme $X \xrightarrow{\pi} Y$ et un monomorphisme $Y \xrightarrow{i} X$ tels que $\pi \circ i = \mathrm{Id}_Y$. Les objets de $\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}$ sont les couples (X, p), où X est un objet de $\mathfrak{C}$ et p un projecteur de X, et les morphismes sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}}((X,p),(Y,q)) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) \ : \ qfp = f\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) \ : \ qf = f = fp\}. \end{aligned}$$

Définition. — *Un* facteur direct *d'un objet X de $\mathfrak{C}$ est un sous-objet de X isomorphe à l'image d'un projecteur de X.*

Proposition. — ***Une catégorie est* pseudo-abélienne *si tout projecteur admet une image.***

Démonstration : Si $p : X \longrightarrow X$ est un projecteur, $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(1 - p)$. Il reste à voir que $X = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. La propriété universelle du coproduit s'écrit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} p \arrow[d] \arrow[ddr, "g"] & \\ \operatorname{Im} p \arrow[r] \arrow[drr, "f"'] & X \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Il suffit de poser $\varphi = f \circ p + g \circ (1 - p)$. □

Proposition. — ***On a un foncteur pleinement fidèle***

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C} \\ X & \longmapsto & (X, \mathrm{Id}_X) \\ u & \longmapsto & u \end{array} \right. .$$

Théorème. — ***$\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}$ est une catégorie pseudo-abélienne. De surcroît, pour tout catégorie pseudo-abélienne $\mathfrak{K}$, on a une équivalence de catégories***

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathfrak{Hom}(\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}, \mathfrak{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}\right. .$$

On dit que c'est l'*enveloppe karoubienne *de $\mathfrak{C}$.

Démonstration :

$$\begin{tikzcd}
(X,p) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Id}_X"'] & (X,p) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[dr, "f"'] & (X,qp) \arrow[l, dashed, shift left, "i"] \arrow[d, dashed] \\
& & (Y,\pi)
\end{tikzcd}$$

Posons $i = q$, et considérons la composée

$$(X,p) \xrightarrow{q} (X,qp) \xrightarrow{i} (X,p) \xrightarrow{f} (Y,\pi).$$

C'est la même chose que f :

$$(fiq - f)p = (fqq - f)p = (fq - f)p = (f - f)p = 0.$$

Pour démontrer que c'est bien l'enveloppe karoubienne, il suffit d'utiliser le résultat suivant. □

Proposition. — ***$\mathfrak{K}$ est l'enveloppe karoubienne de $\mathfrak{C}$ si et seulement si***

(i) $\mathfrak{K}$ est karoubienne ;

(ii) on se donne un foncteur $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}$, pleinement fidèle ;

(iii) tout objet de $\mathfrak{K}$ est facteur direct d'un objet de $\mathfrak{C}$.

Remarque. — Si $\mathfrak{C}$ est munie d'une structure monoïdale, éventuellement tressée ou symétrique, cette structure se transporte sur $\mathfrak{Kar}\ \mathfrak{C}$.

4.2.2 Motifs effectifs

Définition. — *On appelle catégorie des* motifs effectifs, *et on note $\mathfrak{M}_F^+$ l'enveloppe karoubienne de la catégorie des correspondances sur $S = k$, corps de caractéristique nulle. Les objets s'identifient donc aux couples (X,p), où X est une variété et p une correspondance, projecteur de $\bar{X}$. Les morphismes $(X,p) \longrightarrow (Y,q)$ sont les morphismes de variétés $f : X \longrightarrow Y$ tels que $fp = qf$ modulo les $fp = qf = 0$. La composition des morphismes est induite par celle des correspondances.*

Définition. — *On appelle* cohomologie motivique *le foncteur h défini comme suit.*

$$h : \quad \mathfrak{V}_F \longrightarrow S\mathfrak{V}_F \longrightarrow \mathfrak{M}_F^+$$

Remarque. — Comme h est le composé de deux foncteurs monoïdaux stricts, on a une formule de Künneth motivique: $h(X \times Y) = h(X) \otimes h(Y)$.

4.2.3 Décomposition des motifs

Définition. — *Soit X une variété irréductible de dimension n On dira que X est* spéciale *s'il existe un cycle Z de degré 0 tel que $\langle Z \rangle$ soit inversible dans Σ. Il existe alors $e \in A(X)$ tel que pour tout cycle W de degré 0, $\mathsf{cl}\, W = \langle W \rangle e$.*

Remarque. — À cause de la définition précédente, il sera avantageux de considérer les correspondances sur un corps k, par exemple $\mathbb{Q}$.

Proposition. — ***Si X est spéciale, il existe deux correspondances définies canoniquement, $\pi_0 = e \times 1$ et $\pi_n = 1 \times e$. Ce sont des projecteurs. De plus $(X, \pi_0) = \mathrm{Im}\, \pi_0$ est isomorphe à $\mathbf{1}$ et (X, π_n) ne dépend que de la dimension de X.***

Démonstration : Ce sont trivialement des projecteurs. Vérifions-le pour π_0 par exemple.

$$\begin{aligned} \pi_0 \circ \pi_0 &= \mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}{}^* \pi_0 \cdot \mathrm{pr}_{23}{}^* \pi_0) \\ &= \mathrm{pr}_{13*}(e \times 1 \times 1 \cdot 1 \times e \times 1) \\ &= \mathrm{pr}_{13*}(e \times e \times 1) \\ &= e \times 1 \\ &= \pi_0 \end{aligned}$$

Soit $\varphi : P \longrightarrow X$ un F-point de X et $\psi : X \longrightarrow P$ le morphisme canonique. Ils induisent des morphismes $(X, \pi_0) \longrightarrow P$ et $P \longrightarrow (X, \pi_0)$. Ce sont des isomorphismes réciproques.
On a en fait $\mathrm{Hom}((X, \pi_n^X), (Y, \pi_m^Y)) = \Sigma$ si $n = m$, 0 sinon. Un tel morphisme vient d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel que $\pi_m^Y \circ f = f \circ \pi_n^X$. Il suffit d'expliciter ces quantités, et pour des raisons de degré, on voit que l'une d'entre elles est nulle si $n \neq m$. Pour construire un isomorphisme avec Σ, considérons $e_X \times 1_Y : (X, \pi_n^X) \longrightarrow (Y, \pi_n^Y)$ et $1_X \times e_Y : (Y, \pi_n^Y) \longrightarrow (X, \pi_n^X)$. On peut vérifier que ce sont des isomorphismes réciproques. □

Remarque. — Considérons la droite projective $\mathbb{P}^1$. Nous avons une décomposition $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1} = \pi_0 + \pi_1$, donc une décomposition $(\mathbb{P}^1, \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}) = \mathbf{1} \oplus L$ où $L = (\mathbb{P}^1, \pi_1) = \mathrm{Ker}\, \pi_0$ est appelé *motif de Lefschetz.*

Lemme. — ***Si X est spéciale de dimension n, $(X, \pi_n) = L^n$***

Démonstration : Il suffit de traiter le cas de $Y = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^n$. $\bar{Y} = (1+L)^{\otimes n} = \sum \binom{n}{i} L^{\otimes n}$. Or $\pi_n^Y = (\pi_1^{\mathbb{P}^1})^{\otimes n}$. □

Proposition. — $\mathbb{P}^n = e \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus L^{\otimes n}$.

Démonstration : Soit $\pi_i = x^{n-i} \times x^i$ où x est la classe d'un hyperplan. On voit aisément que ce sont des projecteurs orthogonaux deux à deux, et $\mathrm{Id} = \sum \pi_i$. De plus, $\pi_0 = \pi_0^{\mathbb{P}^n}$ et $\pi_n - \pi_0^{\mathbb{P}^n}$. On a donc déjà $\mathbb{P}^n = e \oplus \mathrm{Im}\,\pi_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\,\pi_{n-1} \oplus L^{\otimes n}$. On peut alors à vérifier poids que $\mathbb{P}^i \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ induit un isomorphisme $(\mathbb{P}^n, \pi_i) \simeq (\mathbb{P}^i, \pi_i)$. □

4.2.4 Le Mécano des motifs

Remarque. — Les formules que l'on obtient pour la décomposition des motifs sont en fait naturelles. Si le corps de base est fini, elles reflètent le nombre de points rationnels de la variété, dans d'autres cas, elles traduisent des relations entre les fonctions L.

$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

Pour une transformation monoïdale :

$$|X_Y(\mathbb{F}_q)| = |X(\mathbb{F}_q)| = |Y(\mathbb{F}_q)| + |Y(\mathbb{F}_q)| \cdot |\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)|.$$

Pour les courbes (projectives lisses irréductibles) :

$$h(X) = 1 \oplus h^1(X) \oplus L.$$

$h^1(X)$ peut être vue comme la jacobienne de X — la catégorie des motifs effectifs de poids 1 est équivalente à la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près. Ainsi s'élabore le *mécano des motifs* : décomposer afin d'isoler un morceau intéressant.

4.3 Motifs purs

4.3.1 Inverser un objet

Proposition. — ***Soit $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale* symétrique*, et L un objet tel que le foncteur $\cdot \otimes L$ soit pleinement fidèle. Nous désirons construire une catégorie $\mathfrak{C}[L^{-1}]$, et un foncteur pleinement fidèle $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}[L^{-1}]$ tels que l'image de L soit inversible,* i.e.*, qu'il existe L^{-1} avec $L \otimes L^{-1} = I$. Il revient au même de demander que le foncteur $\cdot \otimes L$ soit une équivalence de catégories.***

Les objets sont les (M, n), où M est un objet de $\mathfrak{C}$ et m un entier naturel. Les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}((M, m), (N, n)) = \varinjlim_{N \geqslant n, m} \mathrm{Hom}(M \otimes L^{N-m}, n \otimes L^{N-n}).$$

Cette catégorie est universelle parmi les sur-catégories de $\mathfrak{C}$ dans lesquelles L est inversible. C'est toujours une catégorie monoïdale, avec

$$(M, m) \otimes (N, n) = (M \otimes N, m + n).$$

On remarque que $\varphi(L) = (1, -1)$, et donc $T = (1, 1)$ est un inverse pour $\varphi(L)$.

4.3.2 Motifs purs

Proposition. — ***Le Foncteur suivant est pleinement fidèle.***

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_F^+ & \longrightarrow & \mathfrak{M}_F^+ \\ M & \longmapsto & M \times L \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de prendre $M = h(X)$, $N = h(Y)$. Remarquons simplement que

$$h(X \times \mathbb{P}^1) = h(X) \otimes h(\mathbb{P}^1) = M \oplus (M \otimes L),$$

$$h(Y \times \mathbb{P}^1) = h(Y) \otimes h(\mathbb{P}^1) = N \oplus (N \otimes L).$$

Or $Z(X \times Y \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = Z(X \times Y) \otimes Z(\mathbb{P}^1) \otimes Z(\mathbb{P}^1)$. □

Définition. — *Définissons la catégorie des motifs de la manière suivante. Ses objets sont les couples (M, n), $M \in \mathfrak{M}_F^+$, $m \in \mathbb{Z}$. Ses morphismes sont* $\mathrm{Hom}((M,m),(N,n)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_F^+}(M \otimes L^{\otimes n_0 - m}, N \otimes L^{\otimes n_0 - n})$*, pour n_0 suffisamment grand. La composition des morphismes est induite par celle de $\mathfrak{M}_F^+$. C'est une catégorie monoïdale symétrique, le produit tensoriel étant donné par $(M,m) \otimes (N,n) = (M \otimes N, m+n)$, et l'objet unité étant $(\mathbf{1}, 0)$.*

Définition. — *On appelle* motif de Tate *le motif* $T = (\mathbf{1}, -1)$, i.e., $T = L^{\otimes -1}$. *On remarquera que, comme pour L,* $\mathrm{Hom}(T^r, T^s) = \mathbb{Q}$ *si $r = s$, et est nul sinon.*

Définition. — *Soit M un motif et n un entier. Notons $M(n) = M \otimes T^n$. C'est la torsion de M par le motif de Tate. Tout motif est de la forme $M(n)$ pour un motif effectif M.*

4.3.3 Autre définition des motifs

Remarque. — Nous avons construit les motifs à partir des correspondances de degré 0 sur le corps $\mathbb{Q}$. De manière explicite, ses objets sont les (X, p, i), où X est une variété dans $\mathfrak{V}_F$, p une correspondance de degré 0 de X telle que $p \circ p = p$, et $i \in \mathbb{N}$. Les morphismes de (X,p,i) à (Y,q,j) sont les correspondances de $X \otimes L^{N-i}$ vers $Y \otimes L^{N-j}$ (avec $N = \max\{i,j\}$, par exemple), telles que $fp = f = qf$.

On peut donner une construction équivalente en considérant des correspondances de degré quelconque. Les objets de $\mathfrak{M}_F$ sont les (X,p,i), où X est une variété de $\mathfrak{V}_F$, p une correspondance de X de degré 0 qui est un projecteur, et $i \in \mathbb{N}$. Les morphismes de (X,p,i) vers (Y,q,j) sont les correspondances $f \in C(X \times Y)$ de degré $j - i$, vérifiant $qf = f = fp$.

4.4 D'autres motifs

Remarque. — Si l'on considère les motifs définis à partir des correspondances de cycles modulo équivalence numérique, il faut admettre les les conjectures standard ([Kle68], [Gro68], [Del74]) pour avoir toutes les « bonnes » propriétés.

Pour remédier à cela, on peut définir des motifs en se basant sur les cycles de Hodge absolus ([Del82]).

Remarque. — Nous avons toujours travaillé avec des variétés projectives lisses. Essayons d'étendre les notions ainsi étudiées. Supposons F de caractéristique 0. X peut s'écrire comme somme disjointe de sous-variétés localement fermées, $X = \coprod X_\alpha$. On peut ensuite écrire $X_\alpha = \bar{X}_\alpha - D_\alpha$, où $\bar{X}_\alpha$ est projective lisse, et $\dim D_\alpha < \dim X_\alpha$. En procédant par récurrence, on obtient

$$X = \coprod Y_i - \coprod Z_j.$$

On peut alors définir le *motif virtuel*

$$h(X) = \sum_i h(Y_i) - \sum_j Z_j,$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathfrak{V}_F$. Certaines conjectures nous disent que cela ne dépend pas de la décomposition.

Remarque. — D'autres motivations peuvent nous amener à considérer les *motifs mixtes* ([Jan90]).

5 Semi-simplicité et radical de Jacobson

5.1 Le radical de Jacobson

Nous rappelons ici quelques résultats élémentaires sur la semi-simplicité ([FD93]).

Définition. — *Un module est dit* simple *s'il n'admet pas de sous-module strict.*

Proposition. — ***Soit M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes***

(i) M est somme directe de modules simples ;

(ii) M est somme de sous-modules simples ;

(iii) tout sous-module de M admet un supplémentaire.

***On dit alors que M est* semi-simple.**

Définition. — *Un anneau A est dit* semi-simple *s'il est semi-simple comme module (à gauche) sur lui-même.*

Théorème. (Wedderburn) — ***Un anneau semi-simple est somme directe d'algèbres de matrices sur des corps gauches.***

Démonstration : Remarquons tout d'abord que si M est un A-module semi-simple de longueur finie, la décomposition de M en somme directe de modules simples nous donne une décomposition $\mathrm{End}_R R \simeq \bigoplus \mathcal{M}_{n_i}(D_i)$ où les D_i sont des corps gauches. Considérons maintenant l'application

$$T : \begin{cases} R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}_R R \\ r \longmapsto T_r : \begin{cases} R \longrightarrow R \\ x \longmapsto xr \end{cases} \end{cases}.$$

Comme $T_r \circ T_s = T_{sr}$, c'est un morphisme d'anneaux. Il est injectif car si $T_r = T_s$, $r = T_r(1) = T_s(1) = s$. Il est surjectif, car si $f \in \mathrm{End}_R R$, $f = T_{f(1)}$. On a donc démontré $R^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_R R \simeq \bigoplus \mathcal{M}_{n_i}(D_i)$. On en déduit $R \simeq \bigoplus \mathcal{M}_{n_i}(D_i^{\mathrm{op}})$ □

Définition. — *Le* radical de Jacobson $J(A)$ *de l'anneau A est l'intersection des idéaux (à gauche) maximaux. C'est aussi l'intersection des annulateurs des modules simples sur A.*

Théorème. — ***L'anneau A est semi-simple si et seulement si il est artinien et si son radical de Jacobson est nul.***

Démonstration : Supposons R artinien, de radical de Jacobson nul. On peut écrire le radical de Jacobson comme intersection *finie* d'idéaux maximaux à gauche, $J(R) = \cap_{i=1}^n L_i$. L'application $R \longrightarrow \prod_{i=1}^n R/L_i = \bigoplus_{i=1}^n R/L_i$ a un noyau nul, et son codomaine est semi-simple. Comme un sous-module d'un module semi-simple est semi-simple, on en déduit que R est semi-simple.

Réciproquement, supposons R semi-simple. On peut écrire $R = \bigoplus_{i\in I} M_i$, où les M_i sont des R-modules simples. Mais R est un R-module de type fini (engendré par 1), donc I est fini, et par suite R est de longueur finie, en particulier il est artinien. Montrons maintenant que $J(R)$ est nul. R peut s'écrire comme somme directe d'anneaux de matrices sur des corps gauches. Soit $A = \mathcal{M}(D)$ un tel anneau. Si M est un A-module, $\mathrm{Ann}\, M$ est un idéal bilatère ne contenant pas 1, donc il est nul. Ainsi, tout module sur A est fidèle. Or, comme A est artinien, tout module contient un sous-module simple fidèle. Un anneau possédant un module simple fidèle a un radical de Jacobson nul. Comme R est le produit de tels anneaux, il suffit désormais de voir que $J(R_1 \times R_2) = J(R_1) \times J(R_2)$. □

Théorème. — ***Tout idéal nilpotent de A est contenu dans le radical de Jacobson. Si de surcroît A est artinien, son radical de Jacobson est lui-même nilpotent. C'est alors le plus grand idéal nilpotent, ou encore le seul idéal nilpotent I tel que R/I soit semi-simple.***

Démonstration : Soit I un idéal nilpotent. Montrons que $IM = 0$ pour tout module simple M. Si IM était non nul, $IM = M$ car M est simple, et par suite $M = IM = I^2M = \cdots = I^kM$. Or, $I^kM = 0$ à partir d'un certain k, d'où $M = 0$. Contradiction. On a bien $I \subset J(R)$.

Supposons maintenant R artinien, et notons J son radical de Jacobson. On a une suite décroissante d'idéaux $J \supset J^2 \supset J^3 \supset \cdots$, qui est donc stationnaire

$J^n = J^{n+1}$. Posons $A = J^n$, on veut montrer que $A = 0$. Supposons $A \neq 0$. Soit I un idéal à gauche minimal parmi les L tels que $AL \neq 0$. Remarquons tout d'abord que I est engendré par un seul élément. En effet, comme $AI \neq 0$, il existe $x \in I$ tel que $Ax \neq 0$. Mais Ax est un idéal à gauche comme ci-dessus, donc $Ax = I$. Mais comme $x \in I$, il existe $a \in A$ tel que $ax = a$, *i.e.*, $(1-a)x = 0$. Mais comme a est dans l'intersection des idéaux maximaux (à gauche), $(1-a)$ admet un un inverse à gauche. Contradiction. donc A était bien nul, *i.e.*, J est nilpotent. $\square$

5.2 Lemme de la trace

Lemme. — ***Soient $w \in H^\bullet(Y \times X)$ et $v \in H^\bullet(X \times Y)$ des correspondances de degré d et $-d$ respectivement, alors***

$$\langle v \cdot {}^t w \rangle = \sum (-1)^i \operatorname{Tr}_i(w \circ v).$$

Démonstration : Comme notre théorie cohomologique vérifie l'axiome de Künneth, v et w sont en fait dans $H(X) \otimes H(Y)$ et $H(Y) \otimes H(X)$. Comme H est graduée, on peut se ramener à la situation suivante.

$$\begin{cases} v & \in & H^{2n-i}(X) \otimes H^j(Y) \\ w & \in & H^{2m-j}(Y) \otimes H^i(X). \end{cases}$$

Comme k est un corps, on peut choisir une base $(a'_l)_l$ de $H^{2n-i}(X)$, et d'après la dualité de Poincaré, on peut prendre une base duale $(a_l)_l$ de $H^i(X)$, *i.e.*, $\langle a'_l \cdot a_m \rangle = \delta_{i,j}$, et supposer

$$\begin{cases} v & = & \sum a'_l \otimes b_l \\ w & = & \sum c_l \otimes a_l \end{cases}$$

Comme v et w sont des correspondances de degré d et $-d$, on a $(2n - i) + j = 2(n + d)$, *i.e.*, $j - i = 2d$. Rappelons que nous considérons des algèbres *anti*-commutatives, et que la contrainte de commutativité s'écrit ${}^t(a \otimes b) = (-1)^{ij}(b \otimes a)$, si a et b sont de degrés i et j. On a alors,

$$\begin{aligned} \langle v \cdot {}^t w \rangle &= \sum_{l,k} \langle (a'_l \otimes b_l) \cdot {}^t(c_k \otimes a_k) \rangle \\ &= \sum (-1)^{ij} \langle (a'_l \otimes b_l) \cdot (a_k \otimes c_k) \rangle \\ &= \sum (-1)^{ij} \langle (a'_l \times b_l) \cdot (a_k \times c_k) \rangle \\ &= (-1)^i \langle (a'_l \times b_l) \cdot (a_k \times c_k) \rangle \end{aligned}$$

La réduction à la diagonale, (PI5), nous dit que le produit d'intersection se comporte bien vis-à-vis du produit cartésien.

$$\begin{aligned} \langle v \cdot {}^t w \rangle &= \sum \langle a'_l \cdot a_k \rangle \langle b_l \cdot c_k \rangle \\ &= \sum \langle b_l \cdot c_l \rangle. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $w \circ v$.

$$w \circ v = \sum_{l,k} (c_l \otimes a_l) \circ (a'_l \otimes b_k).$$

Il suffit de regarder les images des éléments de la base de $H^i(X)$.

$$w \circ v(a_k) = \sum_{l} (c_l \otimes a_l)(b_k).$$

Comme nous désirons la trace, il suffit de regarder le terme en a_k, c'est celui qui provient de c_k :

$$\mathrm{Tr}_i(w \circ v) = \sum_k \mathrm{pr}_{a_k}(w \circ v)(a_k) = \sum_k \langle c_k \cdot b_k \rangle.$$

□

5.3 Catégorie semi-simple et relation d'équivalence admissible

Définition. — *Une catégorie abélienne est dite* semi-simple *si tout objet est de longueur finie et si tout sous-objet admet un supplémentaire. De manière équivalente, il revient à demander que pour tout monomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ il existe un morphisme $v : X \longrightarrow X'$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_{X'}$.*

Remarque. — Dans une catégorie semi-simple, tout objet peut se décomposer en somme directe finie d'objets indécomposables. Pour une analogie topologique, on peut penser aux espaces d'Eilenberg-MacLane.

Théorème. — ***Les conditions suivantes sont équivalentes.***

(i) $\mathfrak{M}_F$ ***est une catégorie abélienne semi-simple ;***

(ii) Pour tout X, $A^{\dim X}(X \times X)$ ***est une*** k***-algèbre semi-simple ;***

(iii) $\sim$ ***est l'équivalence numérique.***

Démonstration : $(i) \Rightarrow (iii)$ Remarquons tout d'abord que l'on peut identifier

- les éléments de $A^i(X)$;
- les morphismes $\mathbf{1} \longrightarrow (X, \mathrm{Id}_X, i)$ dans $\mathfrak{M}_F$;
- les morphismes $(X, \mathrm{Id}_X, \dim X - i) \longrightarrow \mathbf{1}$.

Remarquons ensuite que $\mathbf{1}$ est irréductible. En effet, comme $\mathfrak{M}_F$ est semi-simple, tout sous-objet de $\mathbf{1}$ est facteur direct, *i.e.*, c'est l'image d'un projecteur, $\mathrm{Im}\, p$. Mais $\mathrm{End}\, \mathbf{1} = A^0(\mathrm{Spec}\, F \times_{\mathrm{Spec}\, F} \mathrm{Spec}\, F) = k$ est un corps, en particulier il est intègre. Or $p^2 = p$, donc $p(p-1) = 0$, donc $p = 0$ ou $p - 1 = 0$. Les seuls sous-objets de $\mathbf{1}$ sont donc $\mathbf{1}$ et 0.
Nous savons déjà que la relation d'équivalence numérique est la moins fine. Il suffit donc de montrer que le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathrm{num}}$ est injectif. Soit $f \in A^i(X)$,

$f \neq 0$, qui correspond donc à un morphisme non nul $\mathbf{1} \longrightarrow (X, \mathrm{Id}_X, i)$. Mais comme $\mathbf{1}$ est irréductible, f est un monomorphisme. Comme $\mathfrak{M}_F$ est semi-simple, il existe $g : (X, \mathrm{Id}_X, i) \longrightarrow \mathbf{1}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$. On peut donc voir g comme un élément de $A^{n-i}(X)$. Si l'on explicite la composition des correspondances, il vient $g \circ f = \mathrm{pr}_{13*}(f \cdot g) = 1$, où $\mathrm{pr}_{13} = \mathrm{pr}_{\mathbf{1}\times\mathbf{1}}^{\mathbf{1}\times(X,\mathrm{Id}_X,i)\times\mathbf{1}}$ est en fait le morphisme structural de X : on retrouve le nombre d'intersection de f et g. Comme $\langle f \cdot g\rangle = 1$, l'image de f dans A_{num} est non nulle.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Nous savons qu'il existe une cohomologie de Weil, par exemple la cohomologie étale $H^i_{\text{étale}}(X \times_F \operatorname{Spec} \bar{F}, \mathbb{Q}_l)$. Cela nous permet de considérer la relation d'équivalence homologique pour cette cohomologie. Notons $A^j(X)$ les cycles modulo équivalence numérique, et $B^j(X)$ les cycles modulo équivalence homologique. Nous savons que les B^j sont de dimension finie, et comme l'équivalence numérique est la moins fine des relations admissibles, on en déduit que les A^j sont eux aussi de dimension finie sur k. On veut montrer que le radical de Jacobson de $A^{\dim X}(X \times X)$ est nul. Comme le radical de Jacobson d'une algèbre sur un corps de caractéristique 0 se conserve par extension des scalaires par une extension de corps, et comme $A^j(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} F \simeq A^j(X, F)$, il suffit de le voir pour $F = \mathbb{Q}$, et de même, il suffit de le voir pour $F = \mathbb{Q}_l$. Comme l'équivalence numérique est la relation d'équivalence la moins fine, on a une surjection

$$S : B = B^{\dim X}(X \times X) \longrightarrow A = A^{\dim X}(X \times X).$$

Notons J et J' les radicaux de Jacobson de A et B. $S(J')$ est un idéal bilatère nilpotent. De surcroît, comme B/J' est semi-simple, il en va de même pour $\dfrac{B/J'}{\operatorname{Ker} S} \simeq \dfrac{A}{S(J')}$. On en déduit que $J = S(J')$. Montrons maintenant que $S(J')$ est nul. Soit $f \in J$ et $f' \in J'$ tel que $S(f') = f$. Pour tout $g \in B$, $f' \circ g \in J'$, donc $f' \circ g$ est nilpotent. On a une application $B \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{Q}_l}(H^i(X))$, donc l'image de $f' \circ g$ est nilpotente. En particulier, sa trace est nulle. En vertu d'un lemme précédent, $\langle f' \cdot {}^t g\rangle = 0$. C'est vrai pour tout $g \in B$, donc d'après la définition de l'équivalence numérique, ça signifie que $f' \in \operatorname{Ker} S$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Pour toute variété X, $\operatorname{End}(X, \mathrm{Id}_X, 0)$ est une k-algèbre semi-simple de dimension finie. Si M et N sont des motifs, et J un idéal bilatère nilpotent non trivial de $\operatorname{End} M$, on voit que

$$\begin{pmatrix} J & J \circ \operatorname{Hom}(N, M) \\ \operatorname{Hom}(M, N) \circ J & \operatorname{Hom}(M, N) \circ J \circ \operatorname{Hom}(N, M) \end{pmatrix},$$

est un idéal bilatère nilpotent non trivial de $\operatorname{End} M \oplus N$, qui n'est donc pas semi-simple. Ainsi, pour tout facteur direct M de $(X, \mathrm{Id}_X, 0)$, $\operatorname{End} M$ est semi-simple. Or les $\operatorname{End}(X, \mathrm{Id}_X, n)$ sont en fait de la forme $\operatorname{End}(X \otimes L^n, \mathrm{Id}_{X \otimes L^n}, 0)$, et $(X, p, n) \oplus (X, \mathrm{Id}_X - p, n) = (X, \mathrm{Id}_X, n)$. Donc pour tout objet X de $\mathfrak{M}_F$, $\operatorname{End} X$ est semi-simple de dimension finie. On peut alors conclure en appliquant le lemme suivant. □

Lemme. — ***Si dans une catégorie pseudo-abélienne k-linéaire $\mathfrak{C}$ les $\operatorname{End} X$ sont des k-algèbres semi-simples, de dimension finie, alors $\mathfrak{C}$ est abélienne semi-simple.***

Démonstration : D'après le théorème de Wedderburn, $\operatorname{End} M$ est un produit fini d'algèbres de matrices sur des corps (gauches). Comme $\mathfrak{M}_F$ est semi-simple, un M est indécomposable si et seulement si End M est un corps et tout objet est somme finie d'indécomposables. Nous allons montrer que si M et N sont indécomposables, $\mathrm{Hom}(M,N)$ est non nul si et seulement si M et N sont isomorphes. On aura alors

$$\mathfrak{C} \simeq \bigoplus_{\substack{\text{Classes d'isomorphisme} \\ \text{d'objets indécomposables}}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Catégories d'espaces} \\ \text{vectoriels de dimension} \\ \text{finie sur des corps} \end{array} \right\}$$

Soient donc M et N des objets indécomposables. Supposons $\mathrm{Hom}(M,N) \neq 0$ et $\mathrm{Hom}(N,M) \neq 0$, ces conditions étant équivalentes car $\mathfrak{M}_F$ est semi-simple. Considérons

$$\varphi_{M,N} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(N,M) \times \mathrm{Hom}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{End}\, M \\ (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$$

Si $\varphi_{M,N}$ et $\varphi_{N,M}$ étaient nulles, on construirait un idéal bilatère nilpotent non trivial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(M,N) & 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \mathrm{End}\, M & \mathrm{Hom}(M,N) \\ \mathrm{Hom}(M,N) & \mathrm{End}\, N \end{pmatrix} = \mathrm{End}(M \oplus N)$$

Il existe donc f et g tels que $f \circ g \neq 0$. Comme End M est un corps, $(f \circ g)$ a un inverse, et alors $(f \circ g)^{-1} \circ f$ est un inverse à gauche de g. Si M et N sont indécomposables, on en déduit que g est un isomorphisme. □

Corollaire. — ***Considérons, comme dans la démonstration précédente,***

$$S : B = A^{\dim X}_{\mathrm{hom}} \longrightarrow A = A^{\dim X}_{\mathrm{num}}.$$

Si les composantes de Künneth de la diagonale sont algébriques, alors le radical de Jacobson de B coïncide avec le noyau de S.

Démonstration : Rappelons tout d'abord que la démonstration du théorème nous donne déjà $J' \subset \mathrm{Ker}\, S$. Remarquons maintenant que $\mathrm{Tr}_j(f \circ \pi^i) = \delta_{i,j}\, \mathrm{Tr}_j\, f$. Si $f \sim_{\mathrm{num}} 0$, le lemme de la trace appliqué à $f \circ \pi^i$ nous dit que $\mathrm{Tr}_i\, f = 0$ pour tout i, et il en va de même pour les puissances de f. Les f_i donc des endomorphismes nilpotents. Comme $B \hookrightarrow H^{2\dim X}(X \times X) = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{End}\, H^i(X)$ est un homomorphisme injectif, f est elle-même nilpotente. Les éléments de Ker S sont nilpotents, mais cela ne suffit pas, en général, pour établir qu'un idéal est nilpotent. Si B est une algèbre de type fini (en tant que module), cela suffit. En particulier, les éléments de $\mathrm{Ker}\, S_\Lambda$ sont nilpotents, et $A^{\dim X}_{\mathrm{hom}}(X \times X, \Lambda)$ est un Λ-module de type fini, $\mathrm{Ker}\, S_\Lambda$ est donc un idéal nilpotent. Comme on a une injection $A^{\dim X}_{\mathrm{hom}}(X \times X, k) \hookrightarrow A^{\dim X}_{\mathrm{hom}}(X \times X, \Lambda)$, ce qui induit $\mathrm{Ker}\, S_k \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, S_\Lambda$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, S_\Lambda & \longrightarrow & A^{\dim X}_{\mathrm{hom}}(X \times X, \Lambda) & \longrightarrow & A^{\dim X}_{\mathrm{num}}(X \times X, \Lambda) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, S_F & \longrightarrow & A^{\dim X}_{\mathrm{hom}}(X \times X, F) & \longrightarrow & A^{\dim X}_{\mathrm{num}}(X \times X, \Lambda) \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\, S_k$ est alors lui aussi nilpotent. □

6 Catégories tannakienne et motifs

6.1 Rappels sur les catégories tannakiennes

Rappelons quelques définitions et constructions dans les catégories monoïdales ([SR72], [Del82]).

6.1.1 Catégories monoïdales

Définition. — *Une* catégorie monoïdale *(symétrique) est une catégorie* $\mathfrak{V}$ *munie d'un foncteur*

$$\otimes : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V},$$

d'une contrainte d'associativité, i.e., *d'isomorphismes fonctoriels*

$$\varphi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\simeq} (X \otimes Y) \otimes Z,$$

vérifiant l'axiome du pentagone, d'une contrainte de commutativité, i.e., *d'isomorphismes fonctoriels*

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\simeq} Y \otimes X,$$

avec $\psi_{Y,X} \circ \psi_{X,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$*, et d'un objet unité* I*, avec* $I \xrightarrow{\simeq} I \otimes I$*, tel que* $I \otimes \cdot$ *soit une équivalence de catégories. Ces contraintes sont de plus sujettes à certaines compatibilités, [SR72].*

Définition. — *Une catégorie monoïdale* $(\mathfrak{V}, \otimes, I)$ *est dite* stricte *si les contraintes sont en fait l'identité :* $\psi_{X,Y,Z} = \mathrm{Id}_{X \times (Y \times Z)}$ *et* $\varphi_{X,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$.

Remarque. — Le théorème de cohérence de Mac-Lane, [Mac63], nous permet de nous ramener à des catégories monoïdales strictes.

Définition. — *Un foncteur* $\mathcal{F} : (\mathfrak{V}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathfrak{V}', \otimes', I')$ *entre catégories monoïdales est dit* faiblement monoïdal *s'il est compatible (en un sens évident) aux contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité, et s'il existe des morphismes fonctoriels* $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X \otimes Y)$*. Il est dit* monoïdal *si cet morphisme fonctoriel est un isomorphisme, et* strictement monoïdal *s'il s'agit de l'identité.*

Définition. — *Un objet* L *dans une catégorie monoïdale* $\mathfrak{C}$ *est dit* inversible *si le foncteur*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ X & \longmapsto & L \otimes X \end{array} \right.$$

est une équivalence de catégories. Cela revient à demander qu'il existe une objet L' *et un isomorphisme* $L \otimes L' \xrightarrow{\simeq} \mathbf{1}$.

6.1.2 Dualité

Définition. — *Une* dualité *dans une catégorie monoïdale* $(\mathfrak{V}, \otimes, I)$ *est la donnée de* $(X, Y, \varepsilon, \eta)$*, où* X *et* Y *sont des objets de* $\mathfrak{V}$*, et*

$$\varepsilon : \quad Y \otimes X \longrightarrow I,$$

$$\eta : \quad I \longrightarrow X \otimes Y,$$

tels que les composés suivants soient l'identité.

$$X \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{Id}_X} X \otimes Y \otimes X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes \varepsilon} X$$

$$Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y \otimes \eta} Y \otimes X \otimes Y \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_Y} Y$$

Définition. — *Plaçons-nous dans une catégorie monoïdale, et considérons deux objets* X *et* Y*. Si le foncteur* $T \longmapsto \mathrm{Hom}(T \otimes X, Y)$ *est représentable, on note* $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ *un objet le représentant. On a donc*

$$\mathrm{Hom}(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)).$$

En prenant $T = \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$*, et en considérant* $\mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)}$*, on obtient :*

$$\mathrm{ev}_{X,Y} : \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) \otimes X \longrightarrow Y.$$

Définition. — *Le* dual *d'un objet* X *est défini par* $\check{X} = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbf{1})$*, s'il existe. En cas d'existence des duaux, le* choix *d'un dual pour chaque objet permet d'étendre* ˇ *en un foncteur contravariant.*

$$Y \xleftarrow{\quad u \quad} X$$

$$\begin{tikzcd}
\check{Y} \arrow[r, "\check{u}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\check{Y}} \otimes \eta_X"'] & \check{X} \\
\check{Y} \otimes X \otimes \check{X} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\check{Y}} \otimes u \otimes \mathrm{Id}_{\check{X}}"'] & \check{Y} \otimes Y \otimes \check{X} \arrow[u, "\varepsilon_Y \otimes \mathrm{Id}_{\check{X}}"']
\end{tikzcd}$$

Définition. — *Un objet* X *est dit* réflexif *si* $i_X : X \longmapsto \check{\check{X}}$ *défini ci-après est un isomorphisme.*

Comme $\mathrm{Hom}(T, \check{X}) \simeq \mathrm{Hom}(T \otimes X, \mathbf{1})$,

$$\mathrm{Hom}(X, \check{\check{X}}) \simeq \mathrm{Hom}(X \otimes \check{X}, \mathbf{1}).$$

Définissons i_X comme l'image du composé

$$X \otimes \check{X} \longrightarrow \check{X} \otimes X \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Un objet X est dit réflexif *si $i_X : X \longmapsto \check{\check{X}}$ est un isomorphisme.*

Remarque. — Plaçons-nous dans une catégorie monoïdale symétrique dans laquelle les $\underline{\mathrm{Hom}}$ existent.

$$\begin{array}{c} \underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \otimes X_1 \otimes X_2 \\ \downarrow \\ \underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes X_1 \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \otimes X_2 \\ \downarrow \\ Y_1 \otimes Y_2 \end{array}$$

Or $\mathrm{Hom}(T \otimes X_1 \otimes X_2, Y_2 \otimes Y_2) \simeq \mathrm{Hom}(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2))$, en posant $T = \underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2)$, il vient

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2).$$

Définition. — *Une catégorie monoïdale est dite* rigide *si les* $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ *existent, si tout objet est réflexif et si on a des isomorphismes*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2).$$

Remarque. — Retenons deux cas particuliers.

$$\check{X}_1 \otimes \check{X}_2 \longrightarrow \widecheck{X_1 \otimes X_2},$$

$$\check{X} \otimes Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y).$$

6.1.3 Rigidité et monotonie

Proposition. — ***Soit $\mathfrak{V}$ une catégorie monoïdale symétrique. Un objet X admet un dual si et seulement si le foncteur $s_X = X \otimes \cdot$ admet un adjoint à droite, $s_X^* = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \cdot)$, tel que de plus, pour tout objet Y, le morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(X, 1) \times Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ soit un isomorphisme.***

Démonstration : Supposons d'abord que X admette un dual, $(X, \check{X}, \varepsilon, \eta)$. Considérons le foncteur

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{V} & \longrightarrow & \mathfrak{Hom}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) \\ X & \longmapsto & s_X = X \otimes \cdot \end{array} \right.$$

En appliquant le foncteur S à la dualité $(X, \check{X}, \varepsilon, \eta)$, on trouve les morphismes d'ajonction qui font de $s_{\check{X}}$ un adjoint à droite de s_X.

Réciproquement, posons $X' = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbf{1}) = s_X^*(\mathbf{1})$. L'isomorphisme demandé nous donne $s_X^* \simeq s_{X'}$. Les morphismes d'ajonction sont

$$s_X s_X^* \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Id}_{\mathfrak{Y}},$$

$$\mathrm{Id}_{\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\eta} s_X^* s_X.$$

Montrons que le composé suivant est l'identité.

$$s_X \xrightarrow{s_X \eta} s_X s_{X'} s_X \xrightarrow{\varepsilon s_X} s_X$$

Notons tout d'abord φ et ψ les isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(s_X Y, Z) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(Y, s_X^* Z).$$

Remarquons ensuite que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(s_X s_X^* T, s_X s_X^* T) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(s_X s_X^* T, \varepsilon_T)"] \arrow[d, "\varphi(s_X^* T, s_X s_X^* T)"'] & \mathrm{Hom}(s_X s_X^* T, \varepsilon_T) \arrow[d, "\varphi(s_X^* T, T)"] \\
\mathrm{Hom}(s_X^* T, s_X^* s_X s_X^* T) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(s_X^* T, s_X^* \varepsilon_T)"'] & \mathrm{Hom}(s_X^* T, s_X^* T)
\end{tikzcd}$$

Remarquons aussi que ε et η sont définis par :

$$\eta_T = \varphi(T, s_X T) \, \mathrm{Id}_{s_X T},$$

$$\varepsilon_T = \psi(s_X^* X, X) \, \mathrm{Id}_{s_X^* T},$$

$$s_X^* \varepsilon T \circ \cdot = \mathrm{Hom}(s_X s_X^* T, \varepsilon_T).$$

Dès lors le calcul est facile

$$\begin{aligned}
s_X^* \varepsilon_T \circ \eta s_X^* T &= s_X^* \varepsilon_T \circ \varphi(s_X^* T, s_X s_X^* T)(\mathrm{Id}_{s_X s_X^* T}) \\
&= \mathrm{Hom}(s_X^* T, s_X^* \varepsilon_T) \varphi(s_X^* T, s_X s_X^* T)(\mathrm{Id}_{s_X s_X^* T}) \\
&= \varphi(s_X^* T, T) \, \mathrm{Hom}(s_X s_X^* T, \varepsilon T)(\mathrm{Id}_{s_X s_X^* T}) \\
&= \varphi(s_X^* T, T) \varepsilon(T) \\
&= \varphi(s_X^* T, T) \psi(s_X^* T, T)(\mathrm{Id}_{s_X^* T}) \\
&= \varphi\psi(s_X^* T, T)(\mathrm{Id}_{s_X^* T}) \\
&= \mathrm{Id}_{s_X^* T}
\end{aligned}$$

On procède de même pour montrer que le composé suivant est aussi l'identité.

$$s_X^* \xrightarrow{\eta s_X} s_X^* s_X s_X^* \xrightarrow{s_X \varepsilon} s_X^*$$

En évaluant en $\mathbf{1}$, on obtient une dualité $(X, X', \varepsilon(\mathbf{1}), \eta(\mathbf{1}))$. □

6.1.4 Trace et rang

Définition. — *Appliquons le foncteur* $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\cdot)$ *à*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,X) \xleftarrow{\simeq} \check{X}\otimes X \longrightarrow \mathbf{1}$$

Il vient $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\underline{\mathrm{Hom}}(X,X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\mathbf{1})$, i.e.,

$$\mathrm{End}\, X \longrightarrow \mathrm{End}\,\mathbf{1}.$$

C'est la trace *de* X. *On définit le* rang *(parfois* dimension*) de* X *comme l'image de* Id_X *dans* $\mathrm{End}\,\mathbf{1}$.

Remarque. — On peut donner une autre définition, plus explicite de la trace. Soit $u \in \mathrm{End}\, X$, la trace de u est le composé suivant.

$$\mathbf{1} \longrightarrow X\otimes\check{X} \xrightarrow{u\otimes \mathrm{Id}_{\check{X}}} X\otimes\check{X} \xrightarrow{s} \check{X}\otimes X \longrightarrow \mathbf{1}$$

6.1.5 Catégories tannakiennes

Définition. — *Un* foncteur fibre *est un foncteur monoïdal symétrique exact et fidèle entre catégories monoïdales symétriques abéliennes.*

Remarque. — La notion de foncteur fibre est en fait assez naturelle. Ainsi, une catégorie concrète est une catégorie munie d'un foncteur fidèle à valeurs dans la catégorie des ensembles. Une catégorie galoisienne (qui apparait comme catégorie des revètements galoisiens d'un espace topologique connexe, localement connexe par arcs) est une catégorie abélienne munie d'un foncteur fidèle exact à valeurs dans la catégorie des ensembles finis.

Définition. — *Une* catégorie tannakienne neutre *est une catégorie* k*-linéaire abélienne monoïdale rigide* $(\mathfrak{T},\otimes,I)$*, admettant un foncteur fibre, c'est-à-dire un foncteur* $\mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{vect}\ k$*,* k*-linéaire, fidèle et exact.*

Définition. — *Une catégorie tannakienne est une catégorie* k*-linéaire abélienne monoïdale rigide* $(\mathfrak{T},\otimes,I)$*, telle que* $\mathrm{End}\, I = k$*, admettant un foncteur fibre à valeurs dans* $(\mathfrak{Mod}\ B, \times_B, B, s)$*, où* B *est une* k*-algèbre commutative. En fait, on peut aussi prendre un foncteur fibre à valeur dans la catégorie des modules quasi-cohérents sur un schéma quelconque.*

6.1.6 Catégories tannakiennes et représentations

Théorème. — ***Une catégorie tannakienne* neutre *est équivalente (par une équivalence monoïdale symétrique) à la catégorie des représentations d'un groupe proalgébrique affine.***

6.1.7 Caractérisation interne des catégories tamnnakiennes

Théorème. (Deligne, [Del90]) — ***Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie abélienne k-linéaire monoïdale, où k est un corps de caractéristique nulle. Alors, $\mathfrak{C}$ est tannakienne si et seulement si la trace de tout objet est un entier positif.***

6.2 Catégorie tannakienne des motifs purs

6.2.1 $\mathfrak{M}_F$ est monoïdale symétrique

Remarque. — $\mathfrak{M}_F$ est munie d'une structure monoïdale symétrique.

$$(X \times Y, i+jp \otimes q) \xrightarrow{\sigma} (Y \times X, i+j, q \otimes p)$$

$\sigma \in C(X \times Y \times Y \times X)$ est le graphe de la symétrie $X \times Y \longrightarrow Y \times X$. C'est bien une involution : $\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = d_{X \times Y}$. On peut aussi définir σ comme $\varphi_*(1_X \times 1_X)$, où φ est définie par

$$\varphi : \begin{cases} X \times X & \longrightarrow & X \times X \times X \times X \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,y,x). \end{cases}$$

6.2.2 Dualité dans $\mathfrak{M}_F$

Proposition. — ***Soit (X,p,i) un objet de $\mathfrak{M}_F$, posons $(X,p,i)^\vee = (X, {}^tp, \dim X - i)$. Nous allons montrer que c'est bien un dual de (X,p,i). L'évaluation est un morphisme $(X \times X, p \times {}^tp, \dim X) \longrightarrow I = (P, \mathrm{Id}_P, 0)$. C'est donc une correspondance $\varepsilon \in C(X \times X \times P)$ de degré $\dim X$, i.e., $f \in C^{\dim X}(X \times X)$. Nous poserons $\varepsilon = p$. De même, $\eta = p$. Cela forme alors une dualité. En posant $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = \check{X} \otimes Y$, on obtient une catégorie monoïdale rigide.***

Démonstration : Il faut d'abord vérifier que ε et η définissent bien de morphismes. Commençons par ε. pr_{12} désigne la projection de $X \times X \times X \times X \times P$ sur les deux premiers facteurs, $s_{X \times X, X}$ désigne l'interversion desdits facteurs. Comme c'est un isomorphisme, $s_* = (s^{-1})^*$, s_* est donc un morphisme d'algèbres.

$$\begin{aligned} \varepsilon(p \otimes {}^tp) &= \mathrm{pr}_{12*}(p \otimes {}^tp \cdot 1_X \times 1_X \times p) \\ &= \mathrm{pr}_{12*}(\mathrm{Id}_X \times s_{X \times X, X})_*(p \times p \cdot 1_X \times p \times 1_X) \\ &= \mathrm{pr}_{14*}(p \times p \cdot 1_X \times p \times 1_X) \\ &= \mathrm{pr}_{14*}(p \times 1_X \times 1_X \cdot 1_X \times p \times 1_X \cdot 1_X \times 1_X \times p) \\ &= p \circ p \circ p \end{aligned}$$

C'est la même chose pour η.

$$\begin{aligned}
({}^t p \otimes p) \circ \eta &= \mathrm{pr}_{34*}(\eta \times 1_X \times 1_X \cdot {}^t p \times p) \\
&= \mathrm{pr}_{15*}(s_{X\times X, X} \times 1_X)_*(1_X \times p \times 1_X \cdot p \times p) \\
&= p \circ p \circ p \\
&= p
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à voir que c'est bien une dualité.

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes p) \circ (p \otimes \eta) &= \mathrm{pr}_{15*}(p \otimes \eta \times 1_X \cdot 1_X \times \varepsilon \otimes p) \\
&= \mathrm{pr}_{15*}(p \times \eta \times 1_X \cdot 1_X \times \varepsilon \times p) \\
&= \mathrm{pr}_{15*}(p \times p \times 1_X \cdot 1_X \times p \times p) \\
&= p \circ p \circ p \circ \\
(\varepsilon \otimes {}^t p) \circ (\eta \otimes {}^t p) &= \mathrm{pr}_{15*}(\eta \otimes {}^t p \times 1_X \cdot 1_X \times {}^t p \otimes \varepsilon) \\
&= \mathrm{pr}_{15*}({}^t p \times {}^t p \times 1_X \cdot 1_X \times {}^t p \times {}^t p) \\
&= {}^t p \circ {}^t p \circ {}^t p \circ \\
&= p
\end{aligned}$$

□

Remarque. — Quand on désire transformer un produit tensoriel en produit cartésien, il faut prendre garde à bien distinguer $(X \times X) \times P$, $X \times X$ et $P \times (X \times X)$, pour faire opérer la bonne permutation.

Remarque. — ε et η sont compatibles avec la symétrie.

Démonstration :

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \check{X} \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\sigma"'] & P \\
\check{X} \otimes X \arrow[ur, "\varepsilon_{\check{X}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X \circ \sigma &= \mathrm{pr}_{12*}(\varphi_*(1_X \times 1_X) \cdot 1_X \times 1_X \times p) \\
&= \mathrm{pr}_{12*}\, \varphi_*(1_X \times 1_X \cdot \varphi^*(1_X \times 1_X \times p)) \\
&= 1_X \times 1_X \cdot {}^t p \\
&= {}^t p = \varepsilon_{\check{X}}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_{\check{X}}"'] & \check{X} \otimes X \arrow[d, "\sigma"] \\
& X \otimes \check{X}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta_X &= \mathrm{pr}_{34*}(p \times 1_X \times 1_X \cdot \sigma)\\ &= \mathrm{pr}_{34*}(p \times 1_X \times 1_X \cdot \varphi_*(1_X \times 1_X))\\ &= \mathrm{pr}_{34*}\,\varphi_*(\varphi^*(p \times 1_X \times 1_X) \cdot 1_X \times 1_X)\\ &= {}^tp \cdot 1_X \times 1_X\\ &= {}^tp = \eta_{\check{X}}\end{aligned}$$

□

6.2.3 Calcul du rang de (X, p, i)

Remarque. — Le rang d'un objet X s'obtient à partir du composé suivant.

$$I \xrightarrow{\eta} \check{X} \otimes X \xrightarrow{\sigma} X \otimes \check{X} \xrightarrow{\varepsilon} I$$

Proposition. — **$\mathrm{rang}(X, p, i) = \langle p \cdot {}^tp\rangle$. *En particulier,* $\mathrm{rang}\, h(X) = \langle d_X \cdot d_X\rangle$.**

Démonstration : Considérons *deux* morphismes :

$$(X, i, p) \xrightarrow{u} (Y, j, q) \xrightarrow{v} (X, i, p).$$

Nous allons calculer la trace de vu. C'est le composé suivant.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\eta_X} \check{X} \otimes X \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\check{X}} \otimes vu} \check{X} \otimes X \xrightarrow{\varepsilon_{\check{X}}} \mathbf{1}$$

Il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'interversion des facteurs pour ε car ε est compatible avec la symétrie : $\varepsilon_{\check{X}} v = \varepsilon_X \circ \sigma_{\check{X},X}$. Effectuons le calcul en deux temps, en composant deux morphismes à la fois.

$$\varepsilon_{\check{X}} \circ (\mathrm{Id}_{\check{X}} \otimes v) \circ (\mathrm{Id}_{\check{X}} \otimes u) \circ \eta_X$$

pr_{34} désigne la projection de $P \times X \times X \times X \times X$ sur ses deux derniers facteurs.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_{\check{X}} \otimes u) \circ \eta_X &= \mathrm{pr}_{34*}(\eta_X \times 1_X \times 1_Y \cdot {}^tp \otimes u)\\ &= \mathrm{pr}_{34*}(s_{X,X \times X} \times \mathrm{Id}_Y)_*(p \times 1_X \times 1_Y \cdot p \times u)\\ &= u \circ p \circ p = u\end{aligned}$$

Procédons de même avec l'autre morceau. Notons pr_{12} la projection de $X \times Y \times X \times X \times P$ sur ses deux premiers facteurs.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\check{X}} \circ (\mathrm{Id}_{\check{X}} \otimes v) &= \mathrm{pr}_{12*}({}^tp \otimes v \cdot 1_X \times 1_Y \times {}^tp)\\ &= \mathrm{pr}_{14*}({}^tp \times {}^tv \cdot 1_X \times {}^tp \times 1_X)\\ &= {}^tp \circ {}^tp \circ {}^tv\\ &= {}^tv\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathrm{Tr}\, vu = {}^tv \circ u = \lambda_*(u \cdot {}^tv) = \langle u \cdot {}^tv\rangle.$$

En particulier, si $a \in \mathrm{End}(X, i, p)$, $\mathrm{Tr}\, a = \langle a \cdot {}^tp\rangle$, et $\mathrm{rang}(X, i, p) = \langle p \cdot {}^tp\rangle$. □

6.2.4 Catégorie tannakienne des motifs purs

Théorème. — ***Si les composantes de Kűnneth de la diagonale sont* algébriques *(pour une cohomologie de Weil), pour tout variété, alors la catégorie $\mathfrak{M}_F$ des motifs modulo équivalence numérique peut être munie d'une structure de catégorie tannakienne k-linéaire semi-simple.***

Remarque. — On définit facilement une structure de catégorie monoïdale symétrique sur $\mathfrak{M}_F$ en posant

$$(X, p, m) \otimes (Y, q, n) = (X \times Y, p \times q, m + n)$$

Les contraintes de commutativité et d'associativité proviennent de celles de $\mathfrak{V}_F : X \times Y \simeq Y \times X$ et $X \times (Y \times Z) \simeq (X \times Y) \times Z$. L'objet unité est $\mathbf{1} = (\operatorname{Spec} F, \mathrm{Id}_{\operatorname{Spec} F}, 0)$. Nous allons néanmoins voir que cette structure ne permet pas de conclure. Nous serons amenés à modifier la contrainte de commutativité.

Remarque. — $\mathfrak{M}_F$, ainsi construite, n'est pas tannakienne. En effet, le rang se conserve par le foncteur fibre, et par conséquent il doit être positif : c'est la dimension d'un espace vectoriel. Mais

$$\operatorname{rang}(X, \mathrm{Id}_X, 0) = \langle d_X \cdot {}^t d_X \rangle = \sum (-1)^i \dim H^i(X) = \chi(X)$$

est la caractéristique d'Euler-Poincaré de X. Dans le cas d'une courbe de genre g, par exemple, $\chi(X) = 2 - 2g$. Cette quantité peut être négative. Pour espérer faire de $\mathfrak{M}_F$ une catégorie tannakienne, il faut changer la contrainte de commutativité, pour faire disparaître le $(-1)^i$.

Démonstration : Les composantes de Kűnneth de la diagonale, qui correspondent aux projections $H(X) \longrightarrow H^i(X)$, sont algébriques et permettent donc de décomposer un motif en composantes de différents degrés :

$$(X, p, i)^r = (X, p\pi^r, i)$$

$$(X, p, i) = \bigoplus_r (X, p, i)^r$$

Les morphismes se décomposent de même :

$$f = \bigoplus_{i,j} f^{i,j}.$$

En particulier, la contrainte de commutativité $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi}_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M,$$

$$\dot{\psi}^{r,s}_{M,N} : M^r \otimes N^s \longrightarrow N^r \otimes M^r.$$

Changeons donc la contrainte de commutativité en posant :

$$\psi = \bigoplus (-1)^{rs} \dot{\psi}^{r,s}.$$

On vérifie aisément qu'l s'agit toujours d'une contrainte de commutativité.

Dans le calcul explicite du rang, la contrainte de commutativité intervenait uniquement dans ${}^t(a\otimes b) = (-1)^{rs}(b\otimes a)$, où a et b sont homogènes de degrés r et s. Cette formule devient maintenant ${}^t(a\otimes b) = (b\otimes a)$. Comme la correspondance p est de degré 0, Le lemme de la trace devient donc $\langle u \cdot {}^t v\rangle = \sum \mathrm{Tr}_i(w \circ u)$. Comme la correspondance p est de degré 0, il s'applique : les

$$\mathrm{rang}(X, i, p) = \langle p \cdot {}^t p\rangle = \sum \mathrm{Tr}_i({}^t p \circ p)$$

sont des entiers positifs, le théorème de Deligne nous dit alors que $\mathfrak{M}_F$ est une catégorie tannakienne. □

6.2.5 Sur un corps fini

Corollaire. — ***Si F est une extension d'un corps fini, nous savons que les composante de Kűnneth de la diagonale sont algébriques, [Del74], ainsi*** $\boldsymbol{\mathfrak{M}_F}$ ***est une catégorie tannakienne.***

Remarque. — Il y a d'autres circonstances dans lesquelles ces hypothèses sont satisfaites, par exemple pour les cariétés abéliennes. Nous pouvons considérer la sous-catégorie abélienne monoïdale engendrée par les variétés abéliennes sur un corps F : c'est une catégorie tannakienne.

Références

[Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schemas de caracteristique $p > 0$.* Springer Verlag, 1974.

[BMS87] Beilinson, MacPhearson, and Schlechtmann. Notes on motivic cohomology. *Duke Mathematical Journal*, 54:674–710, 1987.

[Cho56] W.L. Chow. On equivalent classes of cycles in an algebraic variety. *Annals of Mathematics*, 64, 1956.

[Del74] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. *Publications mathématiques de l'IHES*, 43:274–300, 1974.

[Del82] Pierre Deligne, editor. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, number 900 in Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1982.

[Del90] Pierre Deligne. Catégories tannakiennes. In P. Cartier, editor, *The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, volume 2, pages 110–195. Birkhauser, 1990.

[Dem69] Michel Demazure. Motifs des variété algébriques. *Séminaire Bourbaki*, (365), 1969.

[FD93] Benson Farb and R. Keith Dennis. *Noncommutative algebra.* Springer-Verlag, 1993.

[Ful84] William Fulton. *Intersection theory.* Springer, 1984.

[Gro66] Alexander Grothendieck. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications mathématiques de l'IHES*, 29:351–359, 1966.

[Gro68] Alexander Grothendieck. Standard conjectures on algebraic cycles. In *Algebraic geometry, papers presented at the Bombay colloquium*, pages 193–199. Oxford University Press, 1968.

[Har74] Robin Hartshorne. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications mathématiques de l'IHES*, 45:1–99, 1974.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977.

[Jan90] Uwe Jannsen. *Mixed motives and algebraic K-theory.* Springer Verlag, 1990.

[Jan92] Uwe Jannsen. Motives, numerical equivalence and semisimplicity. *Inventiones Mathematicae*, 107:447–452, 1992.

[JS91] André Joyal and Ross Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. In Cardoni, Pedicchio, and Rosolini, editors, *Category theory*, pages 413–492. Springer Verlag, 1991.

[Kle68] S.L. Kleimann. Algebraic cycles and the Weil conjectures. In J. Giraud, editor, *Dix exposés sur la cohomologie des shémas.* North-Holland, 1968.

[Kle72] S.L. Kleimann. Motives. In F Oort, editor, *Fifth nordic summer school in mathematics, Oslo 1970*, pages 53–88. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[Mac63] S. MacLane. Natural associativity and commutativity. *Rice University Studies*, 49:28–46, 1963.

[Man68] Yu. I. Manin. Correspondances, motives and monoïdal transformations. *Mathematics of the* USSR*, Sbornik*, 6(6):439–470, 1068.

[Mil80] J.S. Milne. *Étale cohomology.* Princeton University Press, 1980.

[MW68] P. Monsky and G. Washnitzer. Formal cohomology. *Annals of Mathematics*, 88:181–238, 1968.

[Par70] Bodo Pareigis. *Categories and functors.* Pure and applied mathematics (Academic Press) ;39. Academic Press, New York, 1070.

[Rob72] Joel Roberts. Chow's moving lemma. In F Oort, editor, *Fifth nordic summer school in mathematics, Oslo 1970*, pages 89–96. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[Ser89] Jean-Pierre Serre. *Algèbre locale, multiplicités.* Springer-Verlag, 3rd ed., 1989.

[Ser91] Jean-Pierre Serre. Motifs. In *Journées arithmétiques de Lumini, 17–21 juillet 1989*, volume 198–199–200 of *Asterisque*, pages 333–354. SMF, 1991.

[SGA4] *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, 4*, 1964.

[SR72] Saavedra-Rivano. *Catégories tannakiennes.* Number 265 in Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1972.

[Tan39] T. Tannaka. Űber den Dualitätsatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. *Tōhoku Journal of Mathematics*, 45(45):1–12, 1939.

Index des notations

Index

Table des matières