Espaces de modules et champs algébriques

Vincent Zoonekynd

Séminaire de mathématiques de Cachan, Mars 1997

Résumé

Nous étudions des courbes algébriques, mais nous voulons les étudier toutes en même temps et en particulier mettre une structure algébrique sur l'ensemble de leurs classes d'isomorphies. Pour une structure de schéma ou d'espace algébrique, c'est sans espoir, par contre on peut voir cet espace comme un champ algébrique. C'est l'espace de modules des courbes de genre g.

Le sujet a des motivations diverses : c'est un problème de géométrie algébrique qui a été réveillé par des conjectures en théorie des champs conformes et qui possède des ramifications en théorie des nombres.

Dans un premier temps, nous rappelons des éléments de théorie des catégories, puis nous définissons l'espace de modules fin comme un représentant hypothétique d'un préfaisceau pour finalement décrire la notion de champ algébrique et expliquer que dans ce cadre l'espace recherché existe. L'exposé s'addresse à des personnes n'ayant aucune connaissance en géométrie algébrique, ce qui explique son caractère oral et souvent imprécis.

1 Rappels sur les catégories

On ne rencontre pas de groupe sans morphisme de groupe, ni d'espace vectoriel sans application linéaire : à chaque fois, des objets et des morphismes entre ces objets. Cela relève d'une structure plus générale, celle de catégorie, que nous allons maintenant définir.

Définition. Une *catégorie*, c'est la donnée d'un « ensemble » d'objets et d'un ensemble de flèches (c'est très important, les flèches) qui vérifient ce que l'on s'attend à ce qu'ils vérifient.

Plus précisément, on se donne un ensemble d'objets et pour tout couple d'objets X et Y, un ensemble $\mathrm{Hom}(X,Y)$ que l'on l'on interprète comme l'ensemble des flèches de X à Y, une loi de composition des flèches associative

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

et pour chaque objet un morphisme unité.

Exemples. Le probabiliste manipule des espaces mesurés et des applications mesurables, l'analyste des espaces de Hilbert et des opérateurs (bornés) entre des espaces, l'algébriste des groupes, des espaces vectoriels, des corps et leurs morphismes. La situation est plus intéressante en géométrie : considérons la catégorie des espaces topologiques. On peut prendre pour morphismes les applications continues, ou seulement les homéomorphismes ou encore les applications continues modulo homotopie.

Remarque. J'insiste sur le fait que les objets seuls ne suffisent pas à définir une catégorie : il faut aussi (et même surtout) des flèches. On peut définir la notion de catégorie uniquement avec des flèches, mais on n'y comprend rien. On peut voir cet exposé comme un illustration de l'importance des flèches dans une catégorie.

Remarque. Dans presque tous ces exemples, les objets sont des ensembles et les flèches des applications entre ces ensembles. Ce n'est pas toujours le cas : pensez à l'exemple de la catégorie des espaces topologiques et des applications continues modulo homotopie.

Foncteurs. À un objet d'une catégorie, on peut associer un objet d'une autre catégorie. Si on ne se contente pas de faire cela sur les objets mais aussi sur les flèches (c'est très important, les flèches, je ne le répèterai pas assez), de manière compatible aux compositions et aux identités, on obtient un *foncteur*.

Exemples. À un espace vectoriel, on peut associer son ensemble sous-jacent ; à un ensemble on peut associer l'espace vectoriel libre qu'il engendre. Je vous laisse définir ces foncteurs sur les flèches. De manière plus subtile, on peut associer à un ensemble l'ensemble de ses parties. Mais que faire au niveau des flèches ? Je vous laisse vous convaincre qu'il y a au moins deux manières « naturelles » de définir ce foncteur.

Il faut prendre garde que toute construction « naturelle » n'est pas un foncteur : il est très naturel de prendre le centre d'un groupe, mais on ne voit pas quoi faire au niveau des flèches. Ceci doit vous convaincre que dans les notions de catégories et de foncteurs, les flèches sont très importantes.

Remarque. La notion de foncteur prend toute son ampleur quand on cherche à construire des *invariants* : homotopie, homologie, cohomologie, K-théorie. Cela permet de démontrer que deux objets (d'une catégorie compliquée) ne sont pas isomorphes. Jean-David reviendra sur ce point dans l'exposé suivant.

Remarque. On peut faire apparaître la notion de catégorie dans des suitations un peu moins naturelles, un peu plus formelles. Par exemple, un monoïde est une catégorie à un seul objet ; un groupe est une catégorie à un seul objet dont toute flèche est inversible ; un groupoïde est une catégorie dont toute flèche est inversible (penser au groupoïde fondamental d'un espace topologique).

2 Espaces de modules

Vocabulaire. Je ne définis pas les notions de géométrie algébrique dont j'aurai besoin, mais je me contente de donner des équivalences avec des notions connues. Un *schéma* est un peu comme un variété algébrique qui est un peu comme une variété analytique. Une *courbe* peut être vue, pour simplifier, comme une courbe sur $\mathbb{C}$, qui peut être vue comme une surface de Riemann. Nos courbes peuvent avoir des singularités, mais au pire des points doubles ordinaires (*i.e.*, c'est transversal) et elles n'ont qu'un nombre fini d'automorphismes.

Exemple préliminaire. D'un point de vue différentiable, il existe un unique tore $\mathbb{T}^2$, mais d'un point de vue analytique, conforme ou algébrique il en existe plusieurs : ils sont tous de la forme $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, où t est un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive, $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Deux tores $\mathbb{T}_\tau$ et $\mathbb{T}_{\tau'}$ sont isomorphes si et seulement si τ et τ' diffèrent par un élément du groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. L'ensemble des structures complexes, conformes ou algébriques sur $\mathbb{T}^2$ est donc $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Ça ne devrait-être qu'un ensemble, mais tel qu'il est écrit, il est muni d'une structure complexe. Cette structure est-elle inhérente au problème ou contingente ?

L'espace de modules comme ensemble. Nous cherchons à classifier les courbes de genre donné à isomorphisme près : considérons donc l'ensemble M de ces classes d'isomorphie.

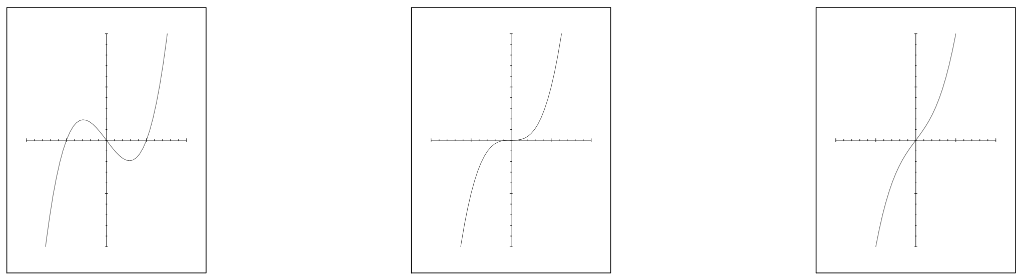
Le problème, c'est que pour l'instant, ce n'est qu'un ensemble : on voudrait mettre une structure géométrique dessus, pour pouvoir par exemple calculer sa dimension, regarder s'il est lisse (*i.e.*, sans singularité), s'il est propre (*i.e.*, compact), s'il est irréductible (*i.e.*, connexe), etc.

Il nous faut donc une structure géométrique dessus. Essayons par exemple une structure de schéma.

Familles de courbes. Nous voudrions savoir quand deux point de notre espace de modules sont « proches ». Quel sens donner à ce terme?

Une *famille de courbes* est une notion que je ne définierai pas rigoureusement. Intuitivement, on se donne un schéma S et pour tout point s de S une courbe X_s, qui varie continûement en fonction de s. Un peu moins vaguement, on se donne un morphisme $X \longrightarrow S$ « gentil » (propre et plat en géométrie algébrique, de jacobienne de rang maximal en géométrie complexe) dont les fibres sont des courbes.

Exemples. Considérons les courbles planes d'équations $y^2 = x^3 + \lambda x^2$, où λ est un paramètre dont on ne précise pas la valeur. En donnant une valeur particulière à λ, on obtient une courbe particulière.



(a) $\lambda = -1$ (b) $\lambda = 0$ (c) $\lambda = 1$

FIG. 1: *La famille de courbes* $y^2 = x^3 + \lambda x^2$

En faisant varier λ, *i.e.*, en prenant *toutes* les valeurs de λ, on obtient une « famille de courbes ». Plus précisément, on peut considérer la surface S d'équation $y = x^3 + zx$ et la projection de S sur l'axe de coordonnées z. L'image réciproque d'un point est l'une des courbes précédentes.

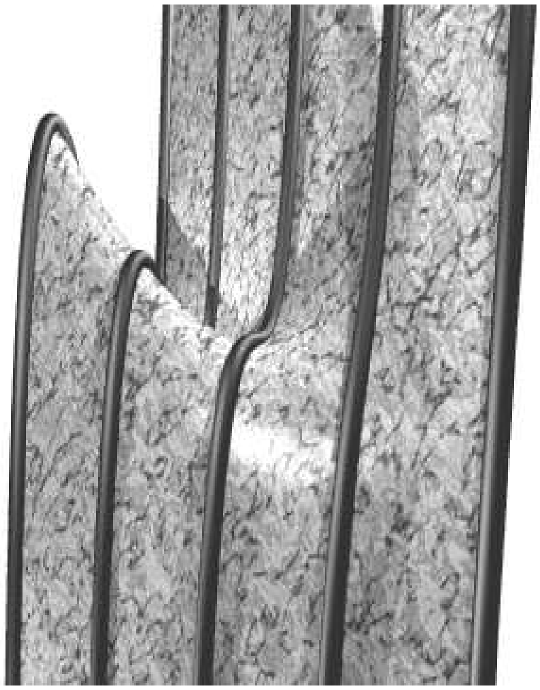


FIG. 2: *L'espace total de cette famille de courbes*

L'exemple précédent correspond à des courbes lisses, mais on peut aussi avoir des singularités : regardez par exemple par exemple la famille des courbes d'équations $y^2 = x^3 + \lambda x^2$.

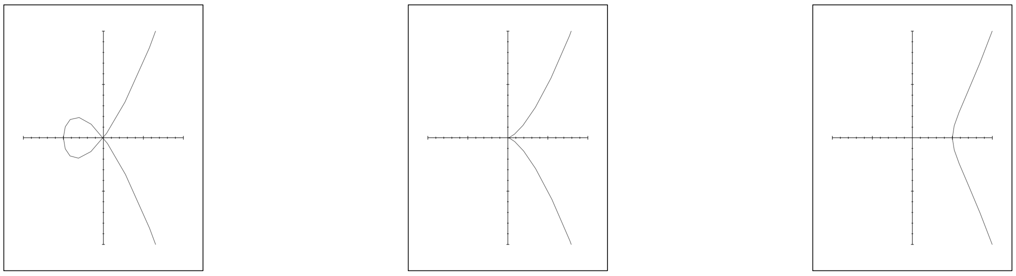
L'espace de modules classifie les familles de courbes. Fixons un schéma S et considérons une famille de courbes sur S, *i.e.*, un morphisme $X \longrightarrow S$. À chaque point s de S on peut associer sa fibre X_s, qui et une courbe et correspond donc à un point de notre espace de modules M. Pour chaque famille $X \longrightarrow S$, nous avons donc une application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & M \\ s & \longmapsto & X_s. \end{array} \right.$$

Pour l'instant, M n'est qu'un ensemble, on pourrait chercher une structure de schéma sur M qui fasse de l'application précédente un morphisme. Plus précisément, on voudrait que pour tout S, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\text{familles sur } S\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(S, M) \\ (X \longrightarrow S) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & M \\ s & \longmapsto & X_s \end{array} \right. \end{array} \right.$$

soit une bijection. On dira alors que M est un *espace de modules fins*.



(a) $\lambda = -1$ (b) $\lambda = 0$ (c) $\lambda = 1$

FIG. 3: *La famille de courbes* $y^2 = x^3 + \lambda x^2$

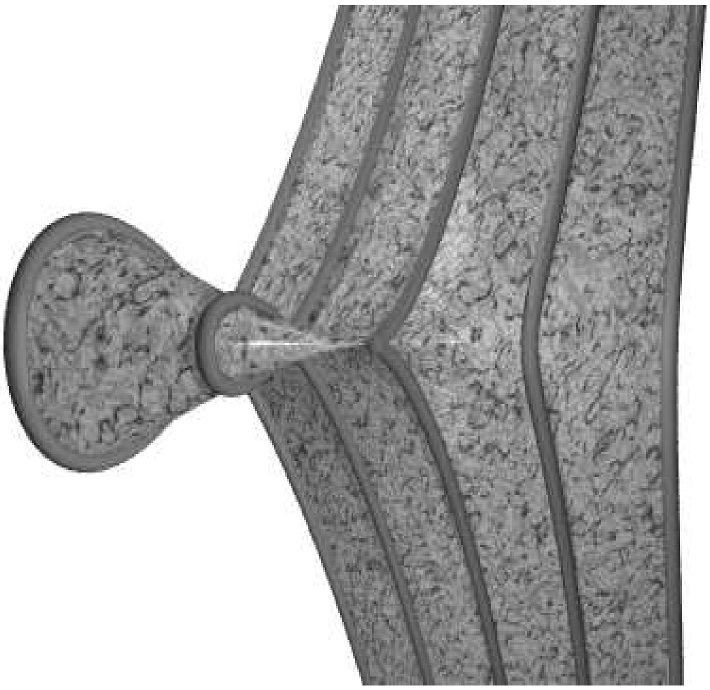


FIG. 4: *L'espace total de cette famille de courbes*

Préfaisceaux représentables. Reprenons la discussion précédente de manière plus rigoureuse. On dispose en fait d'un foncteur (contravariant, *i.e.*, il renverse le sens des flèches)

$$\mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{Schémas} & \longrightarrow & \mathfrak{Ensembles} \\ S & \longmapsto & \{\text{familles sur } S\} \\ (S \longrightarrow S') & \longmapsto & \text{le produit fibré} \end{array} \right.$$

On se demande si ce foncteur est *représentable*, *i.e.*, « égal » (le terme exact est *isomorphe*, mais je n'ai pas défini la notion de morphisme de foncteurs) à un foncteur de la forme $\mathrm{Hom}(\cdot, M)$. Un tel M est alors unique à unique isomorphisme près, c'est notre espace de modules fins.

3 Champs algébriques

Disons-le clairement : l'espace de modules fins n'existe pas. Nous verrons plus loin pourquoi.

Modules grossiers. Il est possible de restreindre la définition de M pour qu'il existe, mais ce n'est pas très naturel. Nous ne développerons pas ce point.

Changer de catégorie. Notre espace de modules n'existe pas dans la catégorie des schémas, mais on pourrait peut-être trouver un objet jouissant de propriétés similaires dans une catégorie plus grosse que celle des schémas.

Préfaisceaux. Un préfaisceau est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans celle des ensembles. C'est peut-être effrayant, mais nous en avons déjà vu deux : le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, M)$ est un préfaisceau et le foncteur $\mathcal{M}$ aussi.

À tout schéma S, on peut associer le préfaisceau $\mathrm{Hom}(\cdot, S)$, et il est aussi possible d'effectier cette opération au niveau des flèches (je ne rentre pas dans les détails, car je n'ai pas défini la notion de morphisme de foncteurs) : on a donc un foncteur de la catégorie des schémas dans celle des préfaisceaux. On peut même montrer que c'est un foncteur pleinement fidèle, *i.e.*, on a les mêmes morphismes. Notre foncteur $\mathcal{M}$ est donc un objet d'une catégorie plus grosse que celle des schémas.

Et là, on pense avoir gagné.

Faisceaux. Mais attention ! Nous voulions pouvoir faire de la géométrie sur notre espace de modules, c'est-à-dire étendre les propriétés et constructions de la catégorie des schémas à notre nouvelle catégorie. Pour cela, nous aurons besoin de deux choses :

(i) la notion de localité doit avoir un sens et être pertinente dans cette catégorie ;

(ii) les objets de cette catégorie doivent « ressembler localement » à des schémas.

Attardons-nous sur la localité. Il est possible de munir la catégorie des schémas d'une topologie : naïvement, c'est la donnée d'une topologie sur chaque schéma, pour tous les schémas en même temps, compatible en un certain sens aux morphismes (ça ne veut absolument rien dire, ce n'est pas du tout ça, mais j'espère que ça donne une bonne idée de la chose). Comme un préfaisceau est un foncteur de la catégorie des schémas, munie d'une topologie, dans celle des ensembles, on peut espérer pouvoir faire des « choses topologiques » dedans. En fait, ça ne marche pas pour tous les préfaisceaux : quand ça marche, on dit que c'est un *faisceau*.

Plus précisément, certaines notions sont locales : la notion d'ouvert, par exemple, est tautologiquement locale, ou la notion de fonction. En effet, se donner une fonction sur une variété revient à se donner une fonction sur les composantes d'un recouvrement par des ouverts en demandant que les restrictions des fonctions définies sur deux ouverts coïncident. On peut définir au niveau des préfaisceaux toutes les notions qui étaient locales au niveau des schémas : mais elles ne sont pas toujours locales. Quand c'est le cas, on dit que le préfaisceau est en fait un faisceau.

Moralement, un faisceau est un préfaisceau dans lequel la notion de localité est pertinente, *i.e.*, pour lequel les notions habituellement locales le sont encore.

Espaces algébriques. Un faisceau ne ressemble pas toujours localement à un schéma : quand c'est le cas, on parle d'*espace algébrique*.

Ça ne marche toujous pas. Il y a en fait un gros problème avec notre espace de modules : on voudrait qu'il vérifie certaines propriétés qui en feraient un espace de modules fins dans la catégorie des espaces algébriques. Eh bien, il ne vérifie pas ces propriétés, pour les mêmes raisons qu'il n'y a pas d'espace de modules fin en tant que schéma. nous détaillerons ces raisons un peu plus loin.

Si ça ne marche toujours pas, c'est parce qu'on n'a vu qu'un ensemble là où il y avait en fait une catégorie : sans nous en apppercevoir, nous avons oublié les morphismes. Je le répète encore : c'est très important, les morphismes, dans une catégorie. Très important.

Catégories fibrées. Nous allons (encore !) généraliser la notion de préfaisceau, pour obtenir une catégorie toujours plus grosse.

Une *catégorie fibrée* est un « pseudo-foncteur » de la catégorie des schémas dans la catégorie des catégories. Ça n'est pas vraiment un foncteur (ça foire un peu au niveau des morphismes, comme quoi, c'est important, les morphismes dans une catégorie), c'est plus général.

Définissons un pseudo-foncteur qui, nous l'espérons, sera finalement notre espace de modules.

$$\mathscr{M}\left\{\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \{\text{familles sur } S \text{ et leurs automorphismes}\} \\ (S' \longrightarrow S) & \longmapsto & \text{produit fibré} \\ \cdots & \longmapsto & \text{Pour un pseudo-foncteur, ce n'est pas tout.} \end{array}\right.$$

Comme précédemment, la catégorie des catégories fibrées est trop grosse pour faire de la géométrie. Nous nous limiterons donc à une sous-catégorie, celle des champs algébriques.

(i) Une catégorie fibrée fibrée pour laquelle la notion de localité est pertinente est un *champ*.

(ii) Un champ qui ressemble localement à un schéma est un *champ algébrique*.

Explication promise. On voit facilement qu'un préfaisceau est une catégorie fibrée dont tous les morphismes sont des identités (cela provient simplement du fait qu'un ensemble peut être vu comme une catégorie sans morphisme, sauf ceux que l'on est obligé de mettre : les identités). Or, il existe des courbes avec des automorphismes non triviaux : le préfaisceau $\mathcal{M}$ n'englobait pas tout l'information des espaces de modules, on perdait tous ces automorphismes. C'est pour cela qu'il ne convenait pas, c'est aussi pour cela que l'espace de modules n'existe pas en tant que schéma.

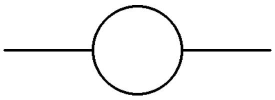
Analogue différentiel. On peut effectuer les mêmes constructions en partant des variétés différentielles : on obtient les *orbifolds* (si quelqu'un sait traduire ce terme, qu'il me contacte). Ce sont des objets géométriques qui ressemblent localement à un espace euclidien (de la forme $\mathbb{R}^n$) quotienté par un groupe fini.

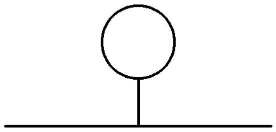
Théorème. La catégorie fibrée $\mathscr{M}$ est un champ algébrique, lisse, irréductible, propre et même projectif.

Liens avec la physique théorique[1]**.** La théorie des champs quantiques s'intéresse aux particulles élémentaires. Le physicien cherchera à calculer des fonctions de corrélation, que l'on peut voir comme des fonctions génératrices permettant de calculer tous les paramètres physiques dont on peut avoir envie. Ces fonctions s'expriment sous forme d'intégrales de chemins (notion mathématique mal comprise) assez difficile à évaluer. Pour en faciliter le calcul, le physicien va en faire un « développement asymptotique ». Supposons que l'on s'intéresse à la situation suivante : au début, on a une particule, à la fin, on a toujours une seule particule. On peut interpréter chaque terme du développement asymptotique comme une situation possible entre l'instant initial et l'instant final.

Ainsi, le premier terme correspond à la situation classique : la particule reste unique.

Le second terme correspond à l'éclatement de la particule en deux, puis à la réunion de ces deux particules en une. En fait, le premier terme correspond à tous les diagrammes trivalents de genre un à deux extrémités. Il y en a un autre : la particule se divise en deux, l'une des deux particules résultantes se divise à nouveau en deux particules qui s'annihilent. Pour les termes suivants, on augmente le genre. Ce sont des *diagrammes de Feynmann*.

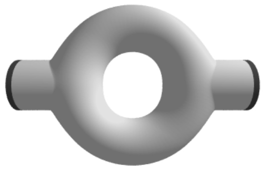




Pour un exemple mathématiquement plus solide mais probablement plus calculatoire, on peut développer la fonction d'Airy en une série indexée par ces diagrammes.

Le problème de la théorie des champs, c'est qu'elle n'arrive pas à rendre compte simultanément des phénomènes quantiques et relativistes. Une théorie que l'on avance pour réconcilier ces deux aspect est celle des cordes : on remplace les particules ponctuelles par de petites cordes (nous les choisirons fermées). L'évolution dans le temps d'une particule ponctuelle traçait une courbe ou un diagramme de Feynmann, nous aurons maintenant des surfaces.

1. J'avais affirmé, sans pouvoir détailler plus, que les espaces de modules de courbes étaient liés avec la théorie des champs conformes et la théorie des cordes. Je complète avec quelques mois de retard. (Mai 1997)



De mêmes que les fonctions de corrélations s'exprimaient comme sommes indexées par les diagrammes de Feynmann, elles s'exprimeront dorénavant comme des « sommes » indexées par des surfaces, *i.e.*, des intégrales sur des espaces de modules de courbes.

Récapitulation. Reprenons la liste des différentes généralisations de la catégorie des schémas que nous avons rencontrées.

$$\begin{tikzcd}
\text{Champs algébriques} \arrow[r, hook] & \text{Champs} \arrow[r, hook] & \text{Catégories fibrées} \\
\text{Espaces algébriques} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \text{Faisceaux} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \text{Préfaisceaux} \arrow[u, hook] \\
\text{Schémas} \arrow[u, hook] \arrow[urr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Rappelons aussi l'idée qui nous a guidés dans ce raisonnement : l'objet que nous voulions étudier n'existait pas dans la catégorie des schémas, il a donc fallu trouver une autre catégorie, suffisemmment grosse pour que l'objet existe, mais pas trop, pour que l'on puisse faire de la géométrie dessus.