On veut calculer numériquement le début du développement asymptotique de de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Sh} \frac{1}{k}.$$

a. Montrer que $u_n \sim \ln n$ puis que $u_n - \ln n$ converge. Demander à Maple une estimation numérique de cette limite.

b. On suppose que le développement asymptotique de u_n s'écrit

$$u_n = \ln n + a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^{10}}.$$

Déterminer expérimentalement les valeurs des a_i.

c. Calculer rigoureusement les premiers termes du développement précédent et en déduire une suite v_n convergeant vers a_0 en $o(1/n^3)$ et une estimation de a_0.

d. Reprendre le même exercice avec

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\operatorname{Sh} \frac{1}{k}}.$$

On remarque tout d'abord que Maple a des problèmes pour calculer lui-même le développement asymptotique : il y a deux grands O dans son résultat, dont un particulièrement louche.

```
S:=Sum(sinh(1/k), k=1..n);
series(",n=infinity);
```

a. Pour avoir un équivalent de u_n, on compare la suite avec des intégrales.

```
series(int(sinh(1/x),x=1..n),n=infinity, 1);
series(int(sinh(1/x),x=1..n),n=infinity, 2);
```

La première ligne est fausse, la seconde nous dit que $u_n \sim \ln n$. Pour vérifier que $u_n - \ln n$ converge, on la transforme en série et on la compare à une intégrale. Je rappelle que pour pouvoir comparer séries et intégrales, il faut des fonctions *monotones* : celles que nous rencontrons le sont, du moins au voisinage de l'infini.

```
series(int( sinh(1/x) - ln(x) + ln(x-1), x=n..infinity),
        n=infinity);
```

Si on demande à Maple la valeur exacte de la limite, il n'y parvient pas — son résultat n'a pas de sens. Par contre son estimation numérique,

$$a_0 \approx .7864024025,$$

est correcte.

```
Limit(S-ln(n), n=infinity);
value(");
evalf("");
```

b. Pour déterminer les termes du développement asymptotique, on peut procéder par coefficients indéterminés.

```
S:=unapply(S,n);
S(n)=ln(n)+sum(a[i]/n^i,i=0..9);
fsolve({seq(value(S(n))=ln(n)+sum(a[i]/n^i,i=0..9),
                n=1..10)},
          {seq(a[i],i=0..9)});
select(has, ", a[0]);
```

On remarquera que cette méthode n'est pas très stable : ici, seuls les trois premières décimales sont exactes et si on prend des valeurs de n plus grandes, les coefficients obtenus sont complètement faux...

```
fsolve({seq(value(S(n))=ln(n)+sum(a[i]/n^i,i=0..9),
                n=101..110)},
          {seq(a[i],i=0..9)});
select(has, ", a[0]);
```

c. Pour le calcul exact, on compare avec des intégrales (il faut pour cela que les intégrandes soient décroissantes à partir d'un certain moment : c'est le cas, mais on ne le vérifiera pas).

```
series(int( sinh(1/x) - ln(x) + ln(x-1), x=n..infinity),
          n=infinity);
b:=+1/2;
series(int(sinh(1/x) - ln(x) + ln(x-1) - b/x + b/(x-1),
               x=n..infinity),
          n=infinity);
c:=-1/6;
series(int(sinh(1/x) - ln(x) + ln(x-1) - b/x + b/(x-1)
               -c/x^2 + c/(x-1)^2,
               x=n..infinity),
          n=infinity);
d:=+1/12;
S(n) = ln(n) + a + b/n + c/n^2 + d/n^3 + o(1/n^3) ;
```

On utilise maintenant ces coefficients pour calculer la limite, et on peut vérifier que la convergence est effectivement plus rapide.

```
evalf(subs(n=100, S-ln(n)-b/n-c/n^2-d/n^3));
seq( evalf(subs(n=l, S(n)-ln(n))), l={1,5,10,15,20} );
seq( evalf(subs(n=l, S(n)-ln(n)-b/n-c/n^2-d/n^3)),
```

```
                          l={1,5,10,15,20} );
```

Si on voulait avoir les dix premiers termes du développement asymptotique, il faudrait faire une boucle.

```
S:=n->sum(sinh(1/k),k=1..n);
v:=n->S(n)-ln(n);
to 10 do
  u:=v(n) - v(n-1);
  combine(u);
  series(", n=infinity,20);
  convert(",polynom);
  sort(");
  if(type(",`+`)) then op(1,"); fi;
  int(", n=m..infinity);
  series(", m=infinity,20);
  convert(",polynom);
  if(type(",`+`)) then op(1,"); fi;
  v:=unapply(v(m)+",m);
od;
evalf(v(10));
```

d. Pour l'autre série, Maple a vraiment des problèmes...

```
restart;
S:=sum(sqrt(sinh(1/k)),k=1..n);
series(",n=infinity);
series(int(sqrt(sinh(1/x)),x=1..n), n=infinity);
```

On commence remarquer que le terme général est équivalent à $1/\sqrt{n}$: la série diverge donc et on obtient un équivalent de ses sommes partielles, $2\sqrt{n}$.

```
series(sum(1/sqrt(k), k=1..n), n=infinity);
```

On pense pouvoir procéder comme précedemment pour savoir quelle sera la forme du terme suivant, mais ça ne marche pas...

```
series(int(sqrt(sinh(1/x))-2*sqrt(x)+2*sqrt(x-1),
             x=n..infinity),
         n=infinity);
```

Comme Maple n'arrive pas à trouver d'équivalent, on y va à la main : on a le droit d'intégrer des équivalents, il suffit donc de prendre un développement asymptotique de l'intégrande et de l'intégrer.

```
series(sqrt(sinh(1/x))-2*sqrt(x)+2*sqrt(x-1), x=infinity);
int(",x);
simplify(", power, symbolic);
expand(");
```

```
a:=1/2;
```

Je laisse le soin au lecteur de poursuivre le développement plus avant.
Maintenant que l'on sait que ça converge, on peut demander à Maple une estimation numérique de la limite.

```
Limit(S-2*sqrt(n), n=infinity);
evalf(");
```

On peut procéder numériquement, en se trompant un peu sur la forme du développement asymptotique (il n'y a en fait que des termes en exposants impairs de $1/\sqrt{n}$).

```
S-sum(a[i]/sqrt(n)^i, i=-1..5);
fsolve({seq(S-sum(a[i]/sqrt(n)^i, i=-1..5), n=1..7)},
       {seq(a[i],i=-1..5)});
a[-1]:=2;
fsolve({seq(S-sum(a[i]/sqrt(n)^i, i=-1..5), n=1..6)},
       {seq(a[i],i=0..5)});
select(has, ", a[0]);
```

Comme précédemment, on peut obtenir les dix premiers termes du développement asymptotique à l'aide d'une boucle — la même boucle.

```
S:=n->sum(sqrt(sinh(1/k)),k=1..n);
v:=n->S(n)-2*sqrt(n);
to 10 do
  u:=v(n) - v(n-1);
  combine(u);
  series(", n=infinity,20);
  convert(",polynom);
  sort(");
  if(type(",`+`)) then op(1,"); fi;
  int(", n=m..infinity);
  series(", m=infinity,20);
  convert(",polynom);
  if(type(",`+`)) then op(1,"); fi;
  v:=unapply(v(m)+",m);
od;
evalf(v(10));
```