a. Résoudre l'équation $xy' + (x-1)y = x^2$. Représenter graphiquement plusieur de ses solutions. Quels sont les points du pla par lesquels passe une courbe intégrale ?

b. Tracer quelques courbes solutions de $y' = y^2 - x$. Que dire de leur comportement à l'infini ?

c. Développement asymptotique de la solution de $y' = \sin x + xy^2$ au voisinage de la singularité.

d. Implémenter la méthode d'Euler pour résoudre numériquement une équation différentielle du premier ordre. Regarder ce que cela donne pour l'exemple précédent : que remarque-t-on ?

e. Tracer des courbes solutions de l'attracteur de Lorentz, défini par les équations suivantes.

$$\begin{aligned} x' &= 10(-x+y) \\ y' &= 28x - y - xz \\ z' &= -\tfrac{8}{3}z + xy. \end{aligned}$$

Que remarque-t-on sur leur comportement à l'infini ?

a. Maple parvient à résoudre cette équation.

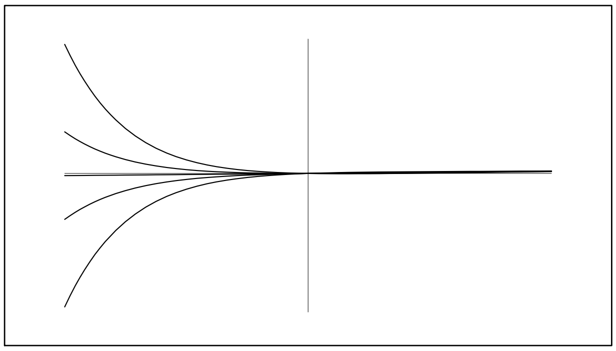

Figure 1: Quelques solutions de $xy' + (x-1)y = x^2$

```
eq:= x*diff(y(x),x) + (x-1)*y(x) = x^2;
dsolve(eq, y(x));
plot([seq(subs(_C1=a,rhs(")),a={0,1,-1,3,-3})], x=-3..3);
```

On peut vérifier qu'une courbe intégrale passe par chaque point du plan en dehors de l'axe des ordonnées.

```
solve(y=rhs(""), _C1);
```

b. On peut utilise la commance `phaseportrait`.

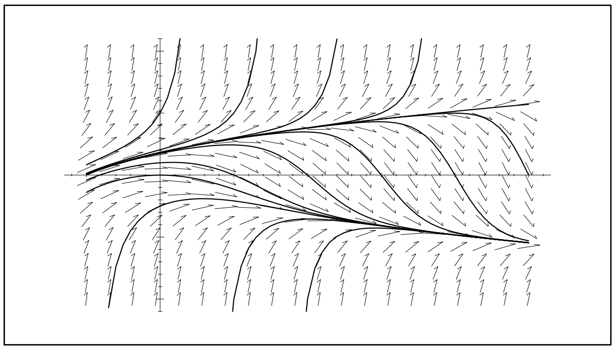

Figure 2: Quelques solutions de $y' = y^2 - x$.

```
DEtools[phaseportrait](
  diff(y(x),x) = y(x)^2 - x,
  y(x),
  x=-1..5,
  [
  [y(0)=0],[y(0)=-1],[y(1)=-4],[y(2)=-4],
  [y(3)=0],[y(1)=0],[y(2)=0],[y(4)=0],[y(5)=0],
  [y(0)=2],[y(1)=2],[y(2)=2],[y(3)=2],
  [y(16)=4]
  ],
  y=-4..4,
  stepsize=.1);
```

On remarque que les courbes intégrales sont de trois types : celles qui tendent rapidement vers l'infini (on peut facilement montrer qu'elles ont une asymptote verticale) ; celles qui se rapprochent de la courbe $y = -\sqrt{x}$ et enfin, une solution isolée, proche de $y = \sqrt{x}$. Pour le voir, on commencerait par remarquer que sur la courbe d'équation $y^2 - x$, les tangentes aux courbes intégrales sont horizontales. On considèrerait alors l'aire comprise entre les courbes d'équation $y = -\sqrt{x} \pm 1$ ou même $y = -\sqrt{x} \pm 1/x$: si une courbe intégrale rendre dans ce domaine, elle n'en sort plus.

c. On commence par tenter de résoudre l'équation, par vérifier graphiquement qu'il y a bien une singularité et par le démontrer mathématiquement.

```
eq := diff(y(x),x) = sin(x)+x*y(x)^2 ;
?dsolve
```

```
dsolve({eq, y(0)=1}, y(x));
```

Remarquons que si Maple n'y arrive pas, il ne dit rien — il ne reconnaît même pas son échec. Signalons au passage qu'il n'existe pas de forme inerte de la commande `dsolve`, à l'instar du couple `solve`/`RootOf`.

```
f := dsolve({eq, y(0)=1}, y(x), numeric);
f(1);
p := proc(x::numeric) RETURN(rhs(op(2,f(x)))) end ;
plot(p, -2..2);
```

Il y a des manières plus efficaces de tracer la solution d'une équation diffé-

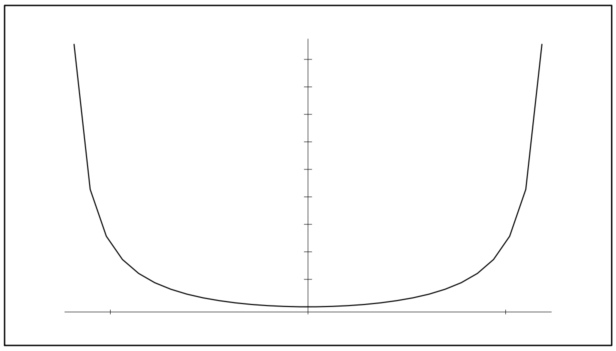

Figure 3: Les solutions de $y' = \sin x + xy^2$ ont une asymptote verticale.

rentielle, mais je pense qu'on peut les oublier.

```
?odeplot
plots[odeplot]( dsolve({eq, y(0)=1}, y(x), numeric),
                y(x), 0..5 ) ;
```

On peut aussi représenter plusieures courbes sur le même graphe, correspondant à des conditions initiales différentes.
Appelons ρ l'abscisse de l'asymptote verticale et effectuons un changement d'inconnue dans l'équation pour se ramener en 0.

```
subs(y(x)=1/u(rho-x), eq);
```

Mais la commande `subs` est très frustre et ne permet pas d'effectuer aussi simplement un changement d'inconnue dans une équation différentielle.

```
subs(diff(y(x),x)=-diff(u(t),t),
     y(x)=1/u(t),
     x=t+rho,
     eq);
```

On aurait aussi pu s'en tirer avec la commande `Dchangevar` (il parait qu'elle est bugguée).

```
DEtools[Dchangevar](y(x)=1/u(x-rho), eq, x);
```

```
subs(x=t+rho, ");
```
La condition initiale devient $u(0) = 0$. Il faut donc se débarasser des $u(t)$ au dénominateur.

```
expand(u(t)^2*");
dsolve({",u(0)=0},u(t), series);
subs(t=rho-x,");
series(1/");
```
On ne peut pas exprimer l'abscisse ρ de la singularité, qui dépend de la condition initiale. En fait, nous avons eu de la chance qu'après le changement d'inconnue notre solution soit bien définie et suffisemment dérivable en zéro. C'est parce que nous savions préalablement que le développement asymptotique aurait cette forme que nous avons effectué ce changement d'inconnue : le terme $\sin x$ influe peu sur la nature de la solution, on peut donc le négliger si on ne désire connaître que l'allure de la solution au voisinage de la solution. Or, sans ce terme, l'équation peut se résoudre. Si la solution avait été équivalente à $1/\sqrt{\rho - x}$, il aurait fallu choisir un autre changement d'inconnue.
(Certains élèves ont procédé différemment : ils *supposent* qu'il existe un développement en série au voisinage de la singularité et concluent en identifiant les coefficients. Le problème de cette méthode est que l'on ne sait pas si un tel développement existe : pour le démontrer, il faudrait procéder comme nous avons fait.)

d. Rappelons que pour mettre quelque chose dans une variable, on utilise `:=` et pas `=` (une assignation est un ordre donné à l'ordinateur, une équation est un objet mathématique que l'on peut passer en paramètre, par exemple à la commande `subs`); rappelons aussi que si on veut définir une suite de valeurs $(y_i)_i$, il ne faut surtout pas utiliser `y(i)` (qui crée une fonction définie uniquement en certains points) mais plutôt `y[i]` (qui crée un tableau). Lors de calculs numériques, il faut s'assurer que Maple manipule bien des nombres à virgule flotante, par exemple à l'aide de la commande `evalf`.

```
Euler:=proc(f,y0,h,n)
local i,y;
y[0]:=evalf(y0);
for i from 0 to n-1 do
  y[i+1]:=y[i]+h*f(i*h,y[i]);
od;
y[n];
end;
Euler((x,y)->sin(x)+x*y^2, 0, .1, 10);
```
On peut demander à Maple de renvoyer, non pas la dernière valeur calculée,

mais la liste de toutes les valeurs. On prendra garde que y n'est pas une liste mais un tableau.

```
Euler:=proc(f,y0,h,n)
local i,k,y;
y[0]:=evalf(y0);
for i from 0 to n−1 do
  y[i+1]:=y[i]+h*f(i*h,y[i]);
od;
[seq(y[k],k=0..n)];
end;
Euler((x,y)−>sin(x)+x*y^2, 0, .1, 10);
```

On peut enfin tracer le résultat, à l'aide de la commande plot.

```
Euler:=proc(f,y0,h,n)
local i,k,y;
y[0]:=evalf(y0);
for i from 0 to n−1 do
  y[i+1]:=y[i]+h*f(i*h,y[i]);
od;
plot([seq([k*h,y[k]],k=0..n)]);
end;
Euler((x,y)−>sin(x)+x*y^2, 0, .1, 20);
Euler((x,y)−>sin(x)+x*y^2, 0, .1, 30);
```

On remarquera qu'ici aussi, la solution semble exploser. Néanmoins, si on y regarde de plus près, on s'apperçoit que l'algorithme va donner une solution, certes très grande, mais définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Les algorithmes de calcul numérique de Maple s'apperçoivent au contraire quie la solution n'est plus définie au delà d'un certain point.

e. Je ne l'ai pas fais (du moins, pas avec Maple).

FIG. 4: *Attracteur de Lorentz*