Rappels d'analyse : fonctions (1)

1. Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln\tan(\frac{\pi}{4}\cos x)$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}\right)^{x^2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\ln\operatorname{Sh}x}-\sqrt[3]{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{\operatorname{Sh}\frac{x}{a}-\operatorname{Sh}\frac{a}{x}}$

5. Équivalent en $x\to\infty$ de
$$\int_x^{x+1}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^5}}.$$

6. Équivalent en 0 de $\sin(\operatorname{Sh}x)-\operatorname{Sh}(\sin x)$.

7. Trouver un équivalent en 0 de
$$x^{x^x}-(\sin x)^{(\sin x)^{\sin x}}.$$

8. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que
$$f(x)=\int_3^x\frac{at+5}{(t-1)^3(t-2)^3}dt$$
soit une fraction rationnelle.

9. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0)=0$. Trouver
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

10. Calculer
$$\int_0^1\arctan\sqrt{1-x^2}\,dx$$
en posant $x=\sin t$ puis en intégrant par parties.

11. $\displaystyle\lim_{u\to0}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx$ [poser $x=tu$]

12. a. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos^2x}=\frac{\pi}{\sqrt3}$ [linéariser le cosinus et utiliser la tangente de l'arc moitié, ici $u=\tan x$]

b. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}$

c. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x^2+x+1)}dx$

d. $\displaystyle\int_0^{4\pi}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}$

13. Développement limité à l'ordre 2 en $x=0$ des fonctions définies par
$$f_0(x)=\sqrt{1+x},\qquad f_{n+1}(x)=\sqrt{2-f_n(x)}.$$

14. Calculer $(x^\alpha\ln x)^{(n)}$.

15. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}$

16. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin^{2n+1}x}{x}dx$

17. Donner les deux premiers termes du développement limité en $x=1$ de
$$f(x)=\int_{x^\alpha}^{x^\beta}\frac{dt}{\ln t}.$$

18. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\operatorname{Sh}\frac1n+\operatorname{Sh}\frac{1}{n+1}+\cdots+\operatorname{Sh}\frac{1}{pn}$ $(p\in\mathbb{N}^\times)$

19. Donner le développement limité à l'ordre n en $x=0$ de
$$\int_x^{\lambda x}\frac{\sin t}{t}dt\qquad(\lambda>0).$$

20. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\sin^2\frac{1}{\sqrt k}$

21. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac kn\sin\frac{k}{n^2}$

22. Calculer les premiers termes du développement asymptotique de
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}.$$

23. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, trouver
$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}(-1)^kf\left(\frac kn\right).$$
[Utiliser la continuité absolue. On peut aussi effectuer une transfornation d'Abel...]

24. Posons $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx}{k}$.

a. Calculer $S_n'(x)$.

b. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^bf(t)\sin(\lambda t)\,dt\underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

c. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(x)$.

1. Donner un développement asymptotique des séries suivantes.
a. $\sum \frac{1}{n}$
b. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
c. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ [Pour la somme, écrire $1/n$ comme une intégrale.]
d. $n!$ [Pour la constante?]
e. $\sum \operatorname{Sh} \frac{1}{n}$
f. $\sum \sqrt{\operatorname{Sh} \frac{1}{n}}$
g. $\sum \sqrt[n]{n}$ [Difficile : l'intégrale ne se calcule pas, il faut chercher un équivalent plus compliqué, mais facile à intégrer.]

2. Donner les premiers termes du développement asymptotique des suites définies par récurrence. [Méthode : considérer la série de terme général $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ et choisir α pour que ce terme soit équivalent à une constante non nulle, conclure à l'aide du théorème de Césaro.]
a. $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+\sin u_n}$
b. $u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+\operatorname{Sh} u_n}$
c. $u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^{u_n}}$
d. $u_0 \in \mathbb{R}, \qquad u_{n+1} = \sin u_n$
e. $u_{n+1} = \sqrt{u_1 + \cdots + u_n}$ $[= \sqrt{u_n^2 + u_n}]$

3. Quelle est la nature des séries dont le terme général suit ?
a. $\frac{(an)^n e^{-an}}{n!}$
b. $\frac{\cos \ln n}{n}$ [ce n'est pas une suite de Cauchy.]
c. $2^n \tan \frac{x}{2^n} \tan^2 \frac{x}{2^{n+1}}$ [Utiliser la formule donnant $\tan 2a$ et se ramener à une série télescopique.]
d. $\operatorname{Argch} \frac{n+1}{n}$
e. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}, \qquad (\alpha > \frac{1}{2})$
f. $\frac{1}{n^\alpha} \ln\left|1 + n^\beta x^n\right|$
g. $\tan(\pi\sqrt{n^2+1})$
h. $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$
i. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$
j. $(-1)^n n^\alpha x^{n^\beta}$
k. $\frac{(\ln n)^\alpha}{n\,(1+(-1)^n(\ln n)^\beta)}, \qquad (\alpha, \beta > 0)$

4. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

5. Étudier la suite
$$u_0, u_1 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$
[Remarquer que $d_n = u_{n+1} - u_n$ est alternée.]

6. (Difficile) Soit $(u_n)_n$ une suite *décroissante* vers 0 ; on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que les séries de terme gé,éral u_n et v_n ont même nature. En cas de convergence, comparer leurs limites.

7. Quelle est la nature des intégrales suivantes. ?
a. $\int_1^\infty \frac{\cos\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} dx$
b. $\int_0^\infty x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})\, dx$
c. $\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx$ [Difficile]
d. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$
e. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$ [Difficile ?]
f. $\int_0^\infty x^\alpha \left|\cos x\right|^{x^\beta} dx$ [Difficile]

8. Donner un équivalent en $+\infty$ de
$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Rappels d'algèbre linéaire, déterminants (3)

1. a. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire (entre espaces vectoriels de dimension finie). Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
b. Même question avec $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
c. Montrer que si u est un endomorphisme de E, il existe un automorphisme v tel que $u \circ v \circ u = u$. Est-il unique ?

2. a. Montrer que si f et g sont des endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, alors ces sommes sont directes.
b. Montrer que si A et B sont deux matrices de produit $AB = 0$ et de somme inversible, alors la somme de leurs rangs égale la dimension de l'espace.
c. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et E' et F' des sous-espaces de E et F. Montrer

$$\dim fE' = \dim E' - \dim(E \cap \operatorname{Ker} f)$$
$$\dim f^{-1}F' = \dim E - \operatorname{rang} f + \dim(F' \cap \operatorname{Im} f).$$

d. Montrer que $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$ si et seulement si $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = 0$ et $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B = \mathbb{R}^n$.
e. Montrer $\operatorname{rang} f \circ g \geqslant \operatorname{rang} g - \dim \operatorname{Ker} f$.
f. Si f et g sont des endomorphismes de E, alors

$$\operatorname{rang} g \circ f = \operatorname{rang} f - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

3. a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que la famille $(f(x), x)$ est liée pour tout x si et seulement si f est une homothétie.
b. Si f et g sont des endomorphismes, peut-on dire que $(f(x), g(x))$ est liée pour tout x si et seulement si (f, g) est liée ? Donner une condition sur g pour que ce soit exact.

4. a. Si f est un endomorphisme de E, montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $\operatorname{rang} f = \frac{1}{2} \dim E$.
b. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est très simple.
c. Soit V un espace vectoriel de dimension $3n$ et f un endomorphisme de rang $2n$ tel que $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est très simple.

5. Quel est le rang d'un endomorphisme nilpotent d'indice $n - 1$ dans un espace de dimension n ?

6. a. Soit p une projection et f un endomorphisme. Montrer que $fp = pf$ si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par f.
b. Que dire de la trace d'un projecteur ? [Elle est entière et égale au rang.]
c. Soient p, q et r des projecteurs. Est-ce que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ peut être un projecteur ?
d. Montrer que si $p_1, \cdots, p_k$ sont des projections dont la somme est toujours une projection, alors $p_i p_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

7. Pour tout endomorphisme T de E il existe un entier n tel que $\operatorname{Ker} T^n \cap \operatorname{Im} T^n = 0$.

8. Soit f un endomorphisme de E, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$
(ii) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$
(iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ f$
(iv) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f \circ f$
(v) il existe g tel que $fgf = f$ et $\operatorname{Im} gf = \operatorname{Im} f$
(vi) $f = 0 \oplus h$ où h est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.

9. Calculer

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

10. Résoudre le système

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \alpha_1 \\ x_2 + x_3 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_n + x_1 &= \alpha_n. \end{aligned}$$

11. Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1+X^2 & X & & 0 \\ X & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & X \\ 0 & & X & 1+X^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-b & & b \\ & \ddots & \\ a & & a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ n & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

12. a. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon ?

b. En remarquant que 0 est valeur propre d'ordre $n-2$, trouver le polynôme caractéristique de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 2 \\ & & \vdots \\ 1 & 2 \cdots & n \end{pmatrix}$$

13. a. Donner la matrice de

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n \\ M & \longmapsto & AMB \end{array} \right.$$

en fonction de celles de A et B. C'est le *produit tensoriel* des matrices A et B, noté $A \otimes B$. Quelle est la trace de φ?

b. Calculer le déterminant de φ si A (ou B) est la matrice identité, puis si A est triangulaire, puis dans le cas général.

c. Montrer que l'application suivante est bien définie, linéaire et trouver sa trace.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n & \longrightarrow & \mathscr{A}_n \\ M & \longmapsto & {}^tAM + MA \end{array} \right.$$

d. Donner la trace de

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_n & \longrightarrow & \mathscr{S}_n \\ S & \longmapsto & {}^tASA \end{array} \right.$$

en fonction de celle de A et A^2.

14. a. Résoudre $X + (\operatorname{Tr} X)A = B$ dans $\mathscr{M}_n$.
b. Résoudre $X + {}^tX = (\operatorname{Tr} X)A$ dans $\mathscr{M}_n$.

15. Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle. [Commencer par $n = 2$.]

16. Montrer qu'une famille $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre si et seulement si il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det f_i(x_j) \neq 0$. [récurrence]

17. a. Montrer $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.
b. Soit $A \in \mathscr{M}_4$, montrer que $\operatorname{rang} A^4 = \operatorname{rang} A^5$.
c. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^8)$ et $\operatorname{rang} f^2 = 4$, quels sont les rangs possibles pour f ?
d. Soit E un espace vectoriel de dimension trois ; trouver les $f \in \operatorname{End} E$ tels que $f^4 = f^2$.
e. Soit $u \in \operatorname{End} E$, montrer que la suite

$$d_k = \dim \operatorname{Ker} u^k - \dim \operatorname{Ker} u^{k-1}$$

est décroissante.

Dualité, espaces vectoriels normés, topologie (4)

1. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E est libre si et seulement si
$$\forall\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}\quad\exists\theta\in E'\quad\forall j\quad\theta(x_j)=\lambda_j.$$

2. a. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$; considérons les formes linéaires suivantes sur $E=\mathbb{R}_2[X]$.
$$e_1 : P\longrightarrow P(a)$$
$$e_2 : P\longrightarrow P'(b)$$
$$e_3 : P\longrightarrow P''(c)$$
Montrer que la famille (e_1,e_2,e_3) est libre. Déterminer la base duale.
b. Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts. Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ définies par $\lambda_i(P)=P(a_i)$, $\quad\mu_i(P)=P'(a_i)$ forment une base. Quelle est la base duale ?
c. Soient a et b des réels distincts. Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n+m+1}[X]$ définies par
$$\lambda_k(P)=P^{(k)}(a)\qquad(0\leqslant k\leqslant n)$$
$$\mu_l(P)=P^{(l)}(b)\qquad(0\leqslant l\leqslant m)$$
forment une base. Quelle est la base duale ?

3. a. Montrer que si f et g sont des formes linéaires de même noyau, alors elles sont colinéaires.
b. Soient $g,f_1,\dots,f_k$ des formes linéaires sur E. Montrer que $\operatorname{Ker} g\supset\bigcap\operatorname{Ker} f_i$ si et seulement si $g\in\operatorname{Vect}(f_i)_i$.
c. Soient $H_1,\dots,H_p$ des hyperplans de E, noyaux des formes linéaires $f_1,\dots,f_p$. Montrer que $\operatorname{rang}(f_1,\dots,f_p)\leqslant\min\{n,p\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(*i*) $\operatorname{rang}(f_1,\dots,f_p)=p$;
(*ii*) $\dim\bigcap H_i=n-p$;
(*iii*) $\forall J\subset[\![1,p]\!]\ \dim\bigcap_J H_i=n-|J|$;
(*iv*) $\forall j\in[\![1,p]\!]\ \dim\bigcap_{i\neq j} H_i\not\subset J_j$.

4. a. Si $f : E\longrightarrow F$ est une application linéaire, on définit une application $f^* : F^*\longrightarrow E^*$ par $f^*(\varphi)=\varphi\circ f$. Montrer qu'elle est linéaire. Comment déduire de la matrice de f (dans deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$) celle de f^* (dans les bases duales) ?
b. On définit une application $c : E\longrightarrow E^{**}$ par $c(x)(\varphi)=\varphi(x)$. Montrer qu'elle est linéaire et bijective (notre espace vectoriel est de dimension finie). Montrer que $f=c^{-1}\circ f^{**}\circ c$.
c. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ l'ensemble des formes linéaires sur E qui s'annullent en tout point de F. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel. Donner sa dimension en fonction de celles de F et E.
d. Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, on note $G^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E en lesquels tous les éléments de G s'annullent. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel. Donner sa dimension en fonction de celles de G et E.

5. Soit E un espace vectoriel réel de dimension trois et f un endomorphisme. Montrer que E possède un plan stable par f.

6. Soit $y_1,\dots,y_n$ une famille génératrice de $(\mathbb{R}^n)'$. Montrer que l'endomorphisme T de $\mathbb{R}^n$ défini par $T(x)=(y_1(x),\dots,y_n(x))$ est inversible.

7. a. Montrer que l'ensemble F des matrices telles que la somme des éléments de chaque ligne est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$. Quelle est sa dimension ?
b. Montrer que l'ensemble G des matrices telles que la somme des éléments d'une ligne a toujours la même valeur est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$. Quelle est sa dimension ?
c. Quelle est la dimension de $F\cap\mathscr{S}_n$?

8. Décrire l'adjoint d'une projection.

9. Montrer qu'on définit une norme sur $E=\mathbb{R}[X]$ par
$$\|P\|=\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|.$$
Montrer que E n'est pas complet.

10. Soit B l'espace des suites bornées muni de la norme infinie. Le sous-espace E des suites nulles à partir d'un certain rang est-il complet ?

11. Si $n\geqslant 2$, il n'existe pas de norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n$ telle que
$$\forall A\in\mathscr{M}_n\quad\forall P\in\mathrm{GL}_n\quad\left\|P^{-1}AP\right\|=\|A\|.$$
[En posant $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, on a $A\sim\lambda A$.]

12. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
$$N(x,y)=\int_0^1|x+ty|\,dt$$

13. a. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$:
$$N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,dt}.$$
b. Montrer $\forall f\ \ \|f\|_\infty\leqslant\sqrt{2}N(f)$. [Cauchy–Schwartz]

c. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ? [Non : regarder x^n.]

14. Montrer que ν_1 et ν_2 sont des normes non équivalentes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$.

$$\nu_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \nu_2(f) = \int_0^1 e^x\,|f(x)|\;dx$$

15. Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^n$, on note $A+B = \{a+b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

a. Si A est ouvert, alors $A+B$ aussi.

b. Si A est fermé et B compact, alors $A+B$ est fermé.

c. Si A et B sont compacts, alors $A+B$ aussi.

d. Trouver deux fermés A et B tels que $A+B$ ne soit pas fermé.

16. Soit X un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow X$ une application telle que

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

[On remarquera qu'elle est donc continue.] Montrer que f possède un point fixe. [Minimiser $d(x, f(x))$.] Montrer que pour tout $a \in X$, la suite $f^n(a)$ converge vers ce point.

Normes matricielles, suites et séries de fonctions (5)

1. Soit A une matrice inversible et X, Y, x et y des vecteurs tels que $AX = Y$ et $A(X+x) = Y+y$. Montrer qu'il existe un réel c ne dépendant que de A tel que
$$\frac{\|x\|}{\|X\|} \leqslant c\frac{\|y\|}{\|Y\|}.$$

2. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1])$ muni de la norme L^1. Calculer la norme de l'application linéaire qui à une fonction associe sa primitive qui s'annule en 0.

3. a. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule centrée en 0. Montrer que
$$E = \{\, u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \ : \ u(K) \subset K \,\}$$
est un compact.
b. Reprendre la même question avec une boule quelconque.
c. Montrer que c'est faux pour un compact quelconque.

4. Si u est un endomorphisme, montrer que
$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp u.$$

5. a. Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie), F un sous-espace et $u \in F^*$. Montrer que l'on peut prolonger u en un élément de E^* de même norme.

6. a. Montrer que f_n est une suite de fonctions uniformément continues convergeant uniformément vers une fonction f, alors f est uniformément continue.
b. Montrer que si g est uniformément continue et si la suite f_n converge uniformément, alors la suite $g \circ f_n$ converge uniformément.
c. Montrer que si f_n converge uniformément vers f, alors $f_n/(1+f_n^2)$ converge uniformément vers $f/(1+f^2)$.
d. Montrer que si f_n et g_n convergent uniformément vers des fonctions f et g *bornées*, alors la suite $f_n g_n$ conferge uniformément.
e. Montrer que si les f_n sont des fonctions continues sur $[0,1]$ qui convergent uniforménent sur $]0,1[$, alors la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
f. Montrer que si f_n est une suite décroissante de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant simplement, alors elle converge uniformément.

7. Quelle est la nature de la convergence des suites suivantes ?
a. $\dfrac{x}{n(1+x^n)}$ sur $[0,\infty[$
b. $\dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ sur $[0,1]$
c. $\ln\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$ sur $[1,\infty[$
d. nx^2e^{-nx} sur $\mathbb{R}_+$
e. $\cos\dfrac{nx}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$
f. $x^2e^{-\sin(x/n)}$ sur $\mathbb{R}$

8. Quelle est la nature de la convergence des séries suivantes ?
a. $\dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$
b. $\dfrac{n+x}{n^3+x^2}$ (oui)
c. $\dfrac{1}{1+x^n}$
d. $\sin\dfrac{x}{n^2} - \dfrac{x}{n^2}\cos x$
e. $\cos^n x \sin x$
f. $\dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$
g. $\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^x\right)$

9. La somme des séries suivantes est-elle dérivable ?
a. $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$
b. $\dfrac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$
c. $\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

10. Calculer la limite en $+\infty$ des séries de terme général suivant.
a. $\arctan\dfrac{x}{n^2+x^2}$
b. $(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ (oui)

11. a. Trouver un équivalent de la série de terme général x^{n^2} en 1^-. [Comparer avec l'intégrale de x^{t^2}.]
b. Trouver un équivalent en 0^+ et $+\infty$ de
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{Sh} nx}.$$

12. a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |\sin x|^n \, e^{-x}\, dx$ [cv.dom.]

13. a. Écrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha}$ sous forme de série.
b. Montrer
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{nz^n}{1-z^n}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

c. Montrer que

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{e^t-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}.$$

d. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.$$

Montrer qu'elle est égale à

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{Ch} t}dt.$$

14. a. Montrer que $\sum e^{n^2x}$ est $\mathscr{C}^{\infty}$.
b. Montrer que la fonction

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

est dérivable, sauf en 0.

15. a. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum(-1)^n t^n f(t)$ converge uniformément.
b. Même question avec f continue sur $[0,1[$.

16. a. Trouver un équivalent en 0 de

$$\sum\frac{x}{n(1+nx^2)}\text{ et }\sum\exp(-x\sqrt{n}).$$

b. Trouver un équivalent en 0 [intégrales] et en $+\infty$ [équivalent puis inégalités] de

$$\sum\frac{1}{n+n^2x}.$$

c. Trouver un équivalent en $+\infty$ et en 0 [inégalités] de

$$\sum\frac{1}{\operatorname{Sh}(nx)}.$$

Séries entières, intégrales dépendant d'un paramètre (6)

1. Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières dont les coefficients suivent.
a. $1/(n(n-1))$
b. $1/(n(2n-1))$
c. $n^{(-1)^n}$
d. $\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{2}$
e. $1/(4n-1)$

2. Donner le rayon de convergence des séries suivantes.
a. $u_n = \ln(1+u_{n-1})$
b. $\displaystyle\int_0^{1/n} \arcsin^\alpha t\,dt$
c. $a_n = b_n/n!$ où $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk!$

3. Développer en série entière les fonctions suivantes.
a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-xt+xt^2}$
b. $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$
c. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\,dt}{1-x\sin t}$
d. $\displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$

4. Exprimer l'intégrale
$$\int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2}dt$$
comme somme d'une série.

5. a. Si R_1 et R_2 sont les rayons de convergence de $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$, quel est celui de $\sum a_n z^n$?
b. Si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, quel est celui de $\sum b_n z^n$ où
$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{n+\ln n}{n^2}\right)a_n\ ?$$
c. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que le rayon de convergence de $g(z) = \sum a_{np+q}z^{np+q}$ est au moins aussi grand. Exprimer g en fonction de f.

6. a. Montrer que la fonction $\exp(-1/x^2)$ n'est pas développable en série entière en 0.
b. Montrer que $\sin(1/x)\exp(-1/x^2)$ n'est pas développable en série entière en 0.

7. a. Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2\sin t)dt$. [dériver]
b. Étudier $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}dt$.

8. Calculer
$$f(x) = \int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta.$$
On pourra montrer que $f(-x) = f(x)$ (poser $\theta = \pi - t$), puis que $2f(x) = f(x)+f(-x) = f(x^2)$ (poser $2\theta = u$, se ramener en $[-\pi,\pi]$ puis en $[0,\pi]$) et que $f(1/x) = f(x) - 2\pi\ln x$.

9. a. Donner le développement en série entière de $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ en untilisant une équation différentielle du secons ordre.
b. Calculer à l'aide d'une équation différentielle
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}x^n.$$
c. Toutes les solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$ sont-elles développables en série entière ?
d. Montrer que $y' = 1 + xy^2$ possède une unique solution développable en série entière s'annulant en 0. Montrer que $3^n a_n$ est décroissante. En déduire un minorant de son rayon de convergence.

Vecteurs propres, diagonalisation, triangulation (7)

1. a. Déterminer les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$ de rang 3.
b. Déterminer les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent d'indice $n-1$ dans un espace de dimension n. [$\operatorname{Ker} f^k$]

2. Déterminer les sous-espaces stables de
$$\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Quelle est la dimension du commutant d'une matrice dont toutes les valeurs propres sont distinctes ?

4. a. Montrer que si un polynôme (non nul) à racines simples annule un endomorphisme u, alors il est diagonalisable.
b. Établir la réciproque.
c. En déduire que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable. D'ailleurs, quels sont les sous-espaces stables pour un tel endomorphisme ?

5. Si p est une projection (ou un endomorphisme diagonalisable), l'endomorphisme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto & fp+pf \end{array} \right.$$
est-il diagonalisable ?

6. a. Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ aussi. Réciproque ? [Attention à ne pas oublier le cas où A ou B est nulle.]
b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ A & A \end{smallmatrix}\right)$ soit diagonalisable.
c. Montrer que si A est diagonalisable alors $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ -A & 3A \end{smallmatrix}\right)$ l'est aussi.
d. Diagonaliser B
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$
e. Calculer le déterminant, les valeurs propres, les vecteurs propres de $\left(\begin{smallmatrix} A & 4A \\ A & A \end{smallmatrix}\right)$ en fonction de ceux de A.

7. a. Donner les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n$ défini par $\varphi(X) = AX + XB$ en fonction de celles de A et B.
b. Idem avec $\varphi(X) = AX + XA$.
c. Idem pour $\varphi(X) = AX - XA$.
d. Idem pour $\varphi(X) = AXB$.
e. Soit u un endomorphisme de E, considérons
$$\varphi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto & u \circ f. \end{array} \right.$$
Soit α une valeur propre de u. Montrer que c'est une valeur propre de f. Déterminer le sous-espace propre correspondant. Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u aussi.

8. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de AP par B, où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On commencera par vérifier que c'est bien une application linéaire.

9. a. Soient f et g des endomorphismes qui commutent. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g. En déduire que f et g possèdent un vecteur propre commun. Montrer que si f et g son diagonalisables, alors elles le sont simultanément.
b. Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{L}(E)$ dont les éléments sont diagonalisables et commutent deux à deux. Montrer que les éléments de $\mathscr{A}$ sont simultanément diagonalisables.

10. Montrer que $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$.

11. a. Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathscr{M}_n$.
b. Soit $A \in \mathscr{M}_n$. Considérons la suite
$$A_0 = A$$
$$A_{k+1} = A \left(A_k - \frac{\operatorname{Tr} A_k}{k+1} I_n \right).$$
Montrer que $A_n = 0$.

12. Peut-on diagonaliser sur $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} & & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \\ \alpha_n & & \end{pmatrix}$?

13. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en fonction de ceux de A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

14. La matrice suivante est-elle diagonalisable ?
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(A-1)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A+1)^2$. En déduire la forme de Jordan de A.

15. Trouver les valeurs propres (et vecteurs propres) des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & & a \\ & \ddots & \\ b & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$$

16. a. Quelles sont les valeurs propres de A?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (a \neq 0)$$

Trouver v_1, v_2, v_3 tels que $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = v_1 - v_2$, $Av_3 = v_2 - v_3$. Calculer A^n puis $\exp(xA)$.

b. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer $\exp A$ en fonction de A, I_2 et les valeurs propres de A.

c. Diagonaliser la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Résoudre $dX/dt = AX$. Calculer $\exp(tX)$. Quel est le lien entre ces deux questions?

d. Calculer

$$\cos \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2} & 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & -\dfrac{\pi}{2} & -\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \qquad \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}^n$$

$$\sum \frac{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{2n}}{(2n)!}$$

e. Soit A une matrice de taille 3 de valeurs propres $\pi/2$, $-\pi$, π. Exprimer A^n en fonction de I_3, A et A^2. Calculer le cosinus et le sinus de A. Vérifier que $\sin^2 A + \cos^2 A = I_3$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\cos A$ et $\sin A$.

17. a. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si toutes ses valeurs propres sont nulles.

b. Montrer que $A^n = 0$ si et seulement si $\forall k\ \operatorname{Tr} A^k = 0$.

c. Montrer que si $AB - BA = B$, alors B est nilpotente.

d. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

e. Montrer que M^p tend vers 0 si et seulement si $\operatorname{Tr} M^p$ tend vers 0. [difficile?]

Espaces euclidiens

1. (Orthonormalisation) **a.** Appliquer l'orthonormalisation de Gram–Schmidt aux vecteurs $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.
b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pour les produits scalaires donnés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

c. Prolonger $(1/\sqrt{3})(1,1,1)$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
d. Vérifier que $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base orthonormale.
e. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k).$$

Montrer que c'est un produit scalaire. Montrer qu'il existe une base $(P_k)_k$ avec $\deg P_k = k$. Calculer $P_k^{(j)}(a_j)$. Expliciter P_k si $a_0 = a_1 = \cdots = 0$.
f. Montrer que toute matrice (complexe) est trigonalisable dans une base orthonormée.

2. (Cauchy–Schwartz) **a.** Soit $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polynôme tel que $\sum a_i^2 = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 |p(x)|\,dx \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

[On peut améliorer cette inégalité en $\pi/\sqrt{6}$.]
b. Soient $n_1,\dots,n_k$ des entiers non nuls distincts. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|1 + e^{in_1x} + \cdots + e^{in_kx}\right|\,dx \leqslant \sqrt{k+1}.$$

c. Montrer que si f et g sont des fonctions de carré intégrable sur $[0,\infty]$, alors il en va de même pour $f+g$; de plus $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.
d. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$. Montrer que $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$, *i.e.*,

$$\int_0^1 |f| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2}.$$

e. Soit A une matrice orthogonale de taille n. Montrer que

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n.$$

f. Calculer $\mathrm{Tr}\,AA^*$ puis montrer que

$$|\mathrm{Tr}\,A| \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{Tr}\,AA^*}.$$

g. Notons $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}\,A^*A}$. Montrer

$$N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$$
$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

h. montrer que l'on définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{L}(E,F)$ par $\langle\varphi,\psi\rangle = \mathrm{Tr}\,\psi^*\varphi$. En déduire

$$(\mathrm{Tr}\,\psi^*\varphi)^2 \leqslant \mathrm{Tr}\,\psi^*\psi\,\mathrm{Tr}\,\varphi^*\varphi.$$

3. Montrer que toute matrice (complexe) est trigonalisable dans une base orthonormale.

Dualité

4. Soient $x_0, a, b \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f tel que $f(x_0) = a$ et $f^*(x_0) = b$.

5. a. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que

$$\forall x,y \qquad \langle x,y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Montrer que f est multiple d'une isométrie. [Prendre une base orthonormale et regarder e_i, e_j et $e_i \pm e_j$.]
b. Montrer qu'une base est orthonormale si et seulement si elle coïncide avec sa base duale.
c. Montrer qu'un sous-espace F est φ-stable si et seulement si $F^\perp$ est f^*-stable.

Projections orthonormales

6. a. Montrer qu'un projecteur est orthonormal si et seulement si sa norme est inférieure à un.
b. Quelle est la norme d'un projecteur (quelconque, non orthogonal) ?
c. Quelle est la norme d'une réflexion ?

7. a. Soit

$$F = \left[\sum_{i=1}^4 x_i = 0,\ \sum_{i=1}^4 ix_i = 0\right] \subset \mathbb{R}^4.$$

Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur F ? Soit $x \in \mathbb{R}^4$; calculer $d(x,F)$.
b. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ et $x_1-x_2+x_3-x_4 = 0$. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur F ? Soit $x \in \mathbb{R}^4$; calculer $d(x,F)$.
c. Soient $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_m$ des vecteurs d'un espace euclidien. Décrire l'orthogonal de

$$\{\, x \in \mathrm{Vect}(a_1,\dots,a_n) \ :\ \forall j\ \langle x, b_j\rangle = 0 \,\}.$$

d. Soient a et b des vecteurs d'un espace euclidien et $\alpha \leqslant \beta$ des réels. On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x, b \rangle \end{array} \right.$$

et l'ensemble

$$X = \{ x \in E \ : \ \langle x, a \rangle \in [\alpha, \beta] \}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et X pour que $f|_X$ soit bornée.

e. Soit E un espace euclidien, E_1 un sous-espace donné comme une somme directe orthogonale $E_1 = F_1 \oplus G$. Montrer que

$$F_1^\perp = E_1^\perp \overset{\perp}{\oplus} G_1 \text{ et } G_1^\perp = E_1 \overset{\perp}{\oplus} F_1.$$

f. Décrire $\{ x \in E \ : \ x + a \perp x - a \}$.

g. Soit p une projection dans un espace vectoriel. Montrer qu'il existe un produit scalaire pour lequel elle soit orthogonale.

h. Montrer qu'un sous-espace J est stable par la projection orthogonale sur E_1 si et seulement si $J = (J \cap E_1) \oplus (J \cap E_1^\perp)$.

8. Soient p_1 et p_2 deux projections orthogonales sur des sous-espaces E_1 et E_2.

a. Montrer qu'elles commutent si et seulement si E est somme directe de

$$(E_1 \cap E_2) \oplus (E_1^\perp \cap E_2) \oplus (E_1 \cap E_2^\perp) \oplus (E_1^\perp \cap E_2^\perp).$$

b. Montrer que si $\|p_1 - p_2\| \leqslant 1$, alors $\dim E_1 = \dim E_2$. [Considérer $E_1 \cap E_2^\perp$.]

c. Montrer que $T = (p_1 - p_2)$ commute avec p_1 et p_2. En déduire que les sous-espaces propres de T associés aux valeurs propres 0 et 1 sont

$$\operatorname{Ker} T = (E_1 \cap E_2) \oplus (E_1^\perp \cap E_2)$$
$$\operatorname{Ker}(1 - T) = (E_1 \cap E_2^\perp) \oplus (E_1^\perp \cap E_2^\perp).$$

9. a. Soit E un espace euclidien de dimension deux et p_1 et p_2 des projections orthogonales sur des droites distinctes D_1 et D_2. Montrer que pour tout vecteur x de norme un, $\|(p_1 - p_2)x\| = \sin\theta$, où θ est l'angle entre les droites D_1 et D_2. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe x tel que y et $(p_1 - p_2)x$ soient colinéaires.

b. Soient p_1 et p_2 des projections orthogonales sur des sous-espaces E_1 et E_2. Montrer que la norme de $p_1 - p_2$ est

$$\inf \left\{ \sin \widehat{D_1, D_2}, \ D_i \subset E_i, \ D_i \perp E_1 \cap E_2 \right\}$$

c. [Il y avait une autre question, mais je n'arrive pas à la faire.]

10. a. Calculer $\displaystyle\min_{a,b,c} \int_0^\infty (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} \, dx$.

b. Calculer $\displaystyle\inf_{a,b} \int_0^\pi (\sin x + ax^2 + bx)^2 \, dx$.

c. Calculer $\displaystyle\inf_{\substack{f \in \mathscr{C}^2 \\ f(0)=2, \ f(1)=4}} \int_0^1 f'(t)^2 dt - 2 \int_0^1 e^t f(t) \, dt$

11. Soit u un endomorphisme tel que

$$\forall x \in E \quad \langle ux, x \rangle = 0.$$

Montrer que son noyau et son image sont des supplémentaires orthogonaux et qu'il est de rang pair.

Matrice de Gram

12. a. Montrer que $\det \langle u_i, u_j \rangle_{i,j} \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si la famille est liée.

b. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général $1/(i + j)$ est strictement positif.

c. Montrer que le déterminant de la matrice de terme général

$$\int_0^{\pi/2} \sin(kt) \sin(lt) \, dx$$

est strictement positif.

Réduction des endomorphismes symétriques (9)

Endomorphismes symétriques

1. Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$, avec $X \neq 0$. Montrer qu'il existe A symétrique telle que $AX = Y$.

2. Soient A et B des matrices symétriques telles que
$$\forall X \ {}^tXAX = {}^tXBX.$$
Montrer que
$$\forall X, Y \ {}^tXAY = {}^tXBY$$
et en déduire que $A = B$.

3. Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que ses coefficients diagonaux sont positifs. Montrer que
$$\max |a_{i,j}| = \max |a_{i,i}| .$$
[Se restreindre à $\operatorname{Vect} e_i$ puis $\operatorname{Vect}\{e_i, e_j\}$.]

4. Soit A une matrice symétrique. Montrer
$$A \geqslant 0 \implies \forall p \ \det A_p \geqslant 0,$$
$$A > 0 \equiv \forall p \ \det A_p \geqslant 0.$$

5. Si S et $T - S$ sont définies positives, alors T et $S^{-1} - T^{-1}$ sont inversibles.

Réduction

6. a. Montrer directement (à la main) que les matrices symétriques réelles n'ont que des valeurs propres réelles.
b. Quelles sont les matrices (complexes) symétriques non diagonalisables de taille deux?
c. Quelles sont les matrices normales (*i.e.*, qui commuttent avec leur adjoint) de taille deux?

7. Soit φ un endomorphisme autoadjoint et π_i les projecteurs sur les différents sous-espaces propres. Montrer que $\pi_i\pi_j = 0$ pour $i \neq j$ puis $\sum \pi_i = 1$ et $\sum \lambda_i \pi_i = \varphi$.

8. Soit φ un endomorphisme autoadjoint, $(e_i)_i$ une base orthgonale le diagonalisant et $(\lambda_i)_i$ les valeurs propres correspondantes. On pose $\varphi_\lambda = \varphi - \lambda \operatorname{Id}$. Montrer que
$$\varphi_\lambda^{-1}(x) = \sum_i \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} e_n$$
si λ n'est pas une valeur propre.

9. a. Soit A une matrice réelle symétrique. Montrer que $\exp A$ est symétrique définie positive.

10. a. Définir la racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif.
b. Existence et unicité de la racine cubique d'une matrice symétrique réelle. [L'unicité est plus difficile.]

11. a. Montrer que toute matrice inversible réelle s'écrit de manière unique comme produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.
b. Montrer que toute matrice symétrique positive inversible peut s'écrire ${}^tPP$.
c. Soit A une matrice symétrique positive ; montrer qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tels que
$$\forall i, j \ a_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle.$$
d. Montrer qu'une matrice est hermitienne positive si et seulement si il existe une matrice B telle que $A = B^*B$.

12. a. Soit A une matrice symétrique réelle positive. Montrer que $\sqrt[n]{\det A} \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A$.
b. Même question si A est un produit de deux matrices symétriques. [?]

13. Soit A une matrice symétrique positive. Peut-on trouver un polynôme P tel que $P(A)^2 = A$, *i.e.*, $P(A)$ est une racine carrée de A? [Oui : diagonaliser et interpoler.] En déduire une racine carrée de
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. a. Soit f un endomorphisme. Montrer que ff^* est autoadjoint positif. Montrer que $\langle x, ff^*x \rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} f$.
b. Montrer que f^*f et f ont même rang [$\operatorname{Ker} f^*f = \operatorname{Ker} f$].
c. Soit f un endomorphisme. Exprimer les bornes inférieure et supérieure de $\|fx\| \,/\, \|x\|$ à l'aide des valeurs propres de f^*f.
d. Soit f un automorphisme. Exprimer la norme de f et de f^{-1} à l'aide des valeurs propres de f^*f.

15. Soit f un endomorphisme. Montrer qu'il existe un produit scalaire pour lequel il est autoadjoint si et seulement si il possède une base de vecteurs propres.

16. Soit A une matrice symétrique. Montrer qu'elle est de trace nulle si et seulement si il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\forall i \ \langle Ae_i, e_i \rangle = 0$.

17. a. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
b. Montrer que deux matrices diagonalisables sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

c. Montrer que A^tA et ${}^tAA$ sont semblables, avec un changement de base orthonormal.

18. Montrer [par récurrence sur la dimension de l'espace ambient] qu'un ensemble fini de matrices symétriques commuttant deux à deux est simultanément diagonalisable.

Réduction simultanée

19. a. Soient q_1 et q_2 des formes quadratiques définies positives. Montrer qu'il existe une base orthonormale pour q_1 et orthogonale pour q_2. Peut-on relâcher les hypothèses sur q_1 et q_2.
b. Soient A et B des matrices symétriques définies positives. Montrer qu'il existe une matrice P telle que ${}^tPAP = I$ et ${}^tPBP$ soit diagonale.
c. Soient A et B des matrices symétriques positives, avec A définie positive. Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det A + \det B$.

20. Soient u et v des endomorphismes symétriques tels que

$$\forall x \quad \langle ux, x\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle vx, x\rangle \geqslant 0.$$

a. Montrer que $\det(1+u) \geqslant 1 + \det u$.
b. Montrer que $\det(u+v) \geqslant \det u + \det v$.

21. Soient A et B des matrices symétriques réelles telles que

$$\forall x \in E \quad q_A(x) \geqslant q_B(x) \geqslant 0.$$

Montrer que $\det A \geqslant \det B$. Étudier le cas d'égalité.

Endomorphismes normaux

22. a. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).
b. Montrer qu'une matrice normale est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).

23. Montrer que A est normale si et seulement si $\operatorname{Tr} A^*A = \sum |\lambda_i|$, où les λ_i sont les valeurs propres de A. [Trigonaliser A dans U_n.]

24. a. Montrer que l'on définit un produit scalaire hermitien sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr} A^*B$.
b. Montrer que

$$\|A^*B - BA^*\|^2 - \|AB - BA\|^2 = \operatorname{Tr}(A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*).$$

c. En déduire que A est normale si et seulement si

$$\forall B \quad AB = BA \implies A^*B = BA^*.$$

Endomorphismes orthogonaux

25. Une symétrie orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ? Et une projection orthogonale ?

26. Déterminer a, b, c et d tels que

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

27. a. Trouver la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ telle que $Re_1 = -e_2$ et $R(u) = u$ pour $u = e_1 - e_2 + e_3$.
b. Dans le plan, trouver un repère tel que $(x, y) \longmapsto (2x - y, 3x - y)$ soit une rotation.

28. Soit A la matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$. Quel est le lien entre l'angle de cette rotation, $\operatorname{Tr} A$ et $\det(1 + A)$?

Réduction des formes quadratiques

29. Diagonaliser les formes bilinéaires symétriques suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Soient A et B des matrices symétriques positives. Montrer que C définie par $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$ est aussi symétrique positive.

31. Montrer qua la matrice $(\inf\{i, j\})_{i,j}$ est définie positive.

32. (Signature) a. Le déterminant sur $\mathscr{M}_2$ est une forme quadratique : quelle est sa signature ?
b. Donner la matrice de la forme bilinéaire $\operatorname{Tr}(AB)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base usuelle. Donner une base orthonormée. Quelle est la signature de cette forme ? Quelle est la signature de sa restriction aux matrices de trace nulle ?
c. Donner la matrice de la forme bilinéaire symétrique $\langle A, B\rangle = \det(A+B) - \det A - \det B$ (sur $\mathscr{M}_2$?). Quelle est sa signature ? Quelle est la signature de sa restriction aux matrices de trace nulle ?
d. Montrer que le coefficient de t dans le polynôme caractéristique de AB définit bien une forme bilinéaire symétrique sur $\mathscr{M}_3$. Quelle est sa signature ? Quelle est la signature de sa restriction aux matrices de trace nulle ?

e. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Delta P = P(X+1) - P(X)$. Trouver le noyau et l'image de Δ. Montrer que

$$\Phi(P) = \int_0^1 P^2 + \alpha \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta^i P(0))^2$$

est une forme quadratique. Quelle est sa signature?

Divers

33. Soient A et B des matrices symétriques, avec B positive. On suppose que

$$\forall X \quad ({}^t XBX = 0 \text{ et } X \neq 0) \implies {}^t XAX > 0.$$

Montrer que $A + \lambda B$ est définie positive pour λ suffisemment grand.

34. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels non tous égaux et $y_1, \ldots, y_n$ d'autres réels. Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\sum_i (y_1 - ax_i - b)^2 \end{cases}$$

atteint son minimum en un unique point (α, β) que l'on déterminera à l'aide de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ | & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

[$f(a,b) = \left\| y - A\binom{a}{b} \right\|^2$, développer, trouver le point critique.]

35. Soit A une matrice symétrique positive, S une matrice symétrique définie positive et $B \in \operatorname{Im} A$. Montrer que toute solution de $AX = B$ peut s'écrire $X = X' + X''$ avec $X' \in \operatorname{Ker} A$ et $X'' \in \operatorname{Ker} S^{-1}A$. Montrer que les valeurs propres de $S^{-1}A$ sont réelles et positives. [Utiliser S pour définir un produit scalaire et reconnaître l'orthogonal du noyau de A; Écrire A et S sous la forme ${}^tTT$ et montrer que $S^{-1}A$ est semblable à une matrice de cette forme.]

36. Soit A une matrice hermitienne positive. Montrer que

$$\det A \leqslant \prod a_{i,i}.$$

37. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $u \in O_n$. Comparer le laplacien de f et de $f \circ u$.

38. Un produit d'endomorphismes autoadjoints l'est encore si et seulement si ils commuttent.

Séries de Fourrier

1. a. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$ et en déduire la somme des $1/(2n+1)^2$.
b. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x$ sur $[-\pi, \pi]$ et en déduire la somme des $(-1)^n/(2n+1)^5$ et celle des $1/(2n+1)^{10}$.
c. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$ et en déduire

$$\sum \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum \frac{1}{n^4}.$$

d. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$ et nulle sur $[-\pi, 0]$; en déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

e. Développer en série de Fourrier la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.
f. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x \sin \alpha x$ sur $[-\pi, \pi]$.
g. Développer en série de Fourrier la fonction définie par $f(x) = \max(0, \sin x)$.
h. Développer en série de Fourrier la fonction définie par $f(x) = 1/(\cos x + \operatorname{Ch} a)$.

2. a. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = Ax^2 + Bx + x$. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

En effectuant un changement de variable du genre $x = \frac{\pi}{2} - t$, en déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}.$$

b. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = Ax^2 + Bx + x$. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

En effectuant un changement de variable du genre $x = \frac{\pi}{2} - t$, en déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}.$$

3. a. Montrer que pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|$$

et en déduire

$$\int_0^{\pi} \ln^2 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{\pi^3}{12}.$$

b. Montrer que pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

4. a. Développer en série de Fourrier la fonction définie par $f(x) = \pi \cos \alpha x$ sur $]-\pi, \pi[$ et en déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 - \alpha^2.$$

b. Développer en série de Fourrier la fonction définie par $f(t) = \sin 2\alpha t$ sur $]-\pi, \pi[$ et en déduire

$$\frac{\pi}{\cos \pi\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{\alpha^2 - (n + \frac{1}{2})^2}.$$

c. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \exp \alpha x$ sur $]0, 2\pi[$ et en déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

d. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \exp i\alpha x$ sur $]-\pi, \pi[$ et en déduire

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

5. Soit $0 < \alpha < \pi$; développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\alpha}{n} = -\frac{\alpha}{2}.$$

6. (Séries trigonométriques) On rappelle que pour $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$,

$$\ln(1 - z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}.$$

a. En considérant $\sin e^{ix}$, $\cos e^{ix}$ et $\exp e^{ix}$, calculer les séries suivantes.

$$\cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \cdots$$

$$\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \cdots$$
$$1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - \cdots$$
$$\frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \cdots$$
$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 2x}{2!} + \cdots$$
$$\frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \cdots$$

b. En considérant la fonction $\ln(1+e^{ix})$, calculer les séries suivantes.

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \cdots$$
$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots$$

c. En considérant la fonction $p/(p-e^ix)$ pour $|p|>1$, calculer les séries suivantes.

$$1 + \frac{\cos x}{p} + \frac{\cos 2x}{p^2} + \cdots$$
$$\frac{\sin x}{p} + \frac{\sin 2x}{p^2} + \cdots$$

d. En procédant comme ci-desus, calculer les séries suivantes.

$$\frac{\cos 2x}{1\cdot 2} + \frac{\cos 3x}{2\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 4} + \cdots$$
$$\frac{\sin 2x}{1\cdot 2} + \frac{\sin 3x}{2\cdot 3} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4} + \cdots$$
$$\sum (-1)^n \frac{n\cos nx}{n^2-1}$$

7. (Phénomène de Gibbs) ...

8. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2(n^2+a^2)}$$

et de classe $\mathscr{C}^2$ et que, sur $[-\pi,\pi]$,

$$f'' - a^2 f = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

Calculer f.

Convergence dominée

9. a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^n t}{\sqrt{t}} dt$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}}$

10. a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{1-t} dt$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2} dt$

11. a. Soit f une fonction continue. En regardant d'abord ce qui se passe avec une fonction constante pour avoir l'idée de faire un changement de variables, calculer

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{tf(x)}{t^2+x^2} dx.$$

b. Pour ce genre d'exercice, on peut aussi approximer la fonction f par des fonctions en escalier : montrer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t) n x^n f(x) \, dx = f(1).$$

12. Donner un équivalent, en $\lambda \to \infty$, de

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+\lambda x}.$$

13. Si f est une fonction positive de classe $\mathscr{C}^2$; on pose

$$I_n(f) = n \int_0^1 f(t)^n dt.$$

a. Calculer $\lim I_n(f)$ si $\sup f \neq 1$.
b. Calculer $\lim I_n(f)$ si $\sup f = 1$ et si f' ne s'annulle pas.
c. Calculer $\lim I_n(f)$ pour $f(t) = 1 - t^p$.

14. ...

Équations différentielles (9)

1. Résoudre les équations différentielles suivantes en séparant les variables.
a. $x(x-1)y' - y(y-1) = 0$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de variation de la constante.
a. $xy' + 3y = x^4 \sin x^{-3}$
b. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$

3. Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes, en posant $u = y/x$.
a. $xy' = y + x\cos^2(y/x)$
b. $2x^2y' = x^2 + y^2$
c. $y' = \dfrac{x+y-1}{x-y+4}$
d. $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+4}$

4. Résoudre les équations différentielles homogènes (généralisées) suivantes en posant $y = z^\alpha$ puis $u = z/x$.
a. $(x^2y^2-1)y' + 2xy^3 = 0$ (?)
b. $2xy'(x-y^2) + y^3 = 0$
c. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$ (?)
d. $y(1+\sqrt{x^2y^4+1}) + 2xy' = 0$ (oui)
e. $(x+y^3) + 3(y^3-x)y^2y' = 0$

5. Résoudre les équations de Bernouilli suivantes.
a. b. c.

6. Résoudre les équations de Riccati suivantes, en posant $y = y_1 + z$ (ou directement $y = y_1 + 1/u$), où y_1 est une solution particulière de l'équation.
a. $y' - y^2 + 2e^xy = e^2x + e^x$, $y_1 = e^x$
b. $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$, $y_1 = \sin x$
c. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$, $y_1 = 1/x$

7. Les équations suivantes sont de la forme $f(y,y') = 0$, mais on ne peut pas isoler y'. Les résoudre en isolant y, en posant $p = y'$ et en différenciant.
a. $y = ay'^2 + by'^3$
b. $y = (y'^2 - y' + 1)e^{y'}$

8. Si on ne peut pas isoler y, essayer de paramétrer f et procéder de même.
a. $y^{2/3} + y'^{2/3} = 1$

9. Pour les équations de la forme $f(x,y') = 0$ dans lesquelles on ne peut pas isoler y', on procède encore comme précedemment.
a. $ay' + by'^2 = x$

10. On peut encore procéder comme ci-dessus pour certaines équations dans lesquelles apparaissent x, y et y' ; par exemple, celles de la forme $y = x\varphi(y') + \psi(y')$. (???)
a. $y = 2xy' + \ln y'$
b. $y = xy' + a/2y'$

11. Intégrer les formes différentielles suivantes en utilisant le fait que l'on peut écrire (dans un ouvert simplement connexe) $Mdx + Ndy = du$ si et seulement si
$$\frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$
a. $\sin(xy) + xy\cos(xy) + x^2\cos(xy)y' = 0$
b. $x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0$
c. $\dfrac{\sin 2x}{y} + x + \left(y - \sin^2 x/y\right)y' = 0$
d. Donner un exemple où l'on n'est pas dans un ouvert simplement connexe.

12. Intégrer les formes différentielles suivantes en recherchant un facteur intégrant, *i.e.*, une fonction μ telle que $\mu M dx + \mu N dy$ soit une forme exacte, *i.e.*, telle que
$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}.$$
a. $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$, $\mu = \mu(x)$
b. $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$, $\mu = \mu(y)$
c. $(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0$, $\mu = \mu(x^2+y^2)$
d. $(x^2+y^2+1)dx - 2xydy = 0$, $\mu = \mu(y^2-x^2)$
e. $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$, $\mu = \mu(x^2+y^2)$

13. Résoudre les éqauations différentielles linéaires suivantes.
a. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$
b. $y'' + 3y' + 2y = x\sin x + e^{3x}$

14. Si l'on connait une solution y_1 d'une équation différentielle (linéaire ?), on peut abaisser son ordre en cherchant des solutions de la forme $y = y_1z$.
a. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y_1 = \sin x/x$
b. $(1-\operatorname{Ch} x)y'' - y'\operatorname{Sh} x - y = 1$, en commençant par chercher une solution commune avec $y'' - y$.

15. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la méthode de variation des constantes. (?)
a. $y'' + 2y'/x + y = 1/x$ (?)
b. $y'' + y = 1/\cos x$ (?)

16. On peut abaisser l'ordre d'une équation dans laquelle x n'apparait pas en posant $p = y'$ et en cherchant p comme une fonction de y.
a. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ (?)

b. $yy'' = y'^2$
c. $y'' = 2yy'$
d. $y'' = 2yy'$
e. $3y'y'' = 2y$
f. $y'' = 2y^3$

17. Résoudre les équations homogènes suivantes en posant $y = \exp \int z$ pour se ramener à une équation d'ordre inférieur.
a. $x^2yy'' = (y - xy')^2$

18. Résoudre les équations homogènes généralisées suivantes en posant $x = e^t$ et $y = ue^{\alpha t}$. La variable t disparaîtra et on pourra faire baisser l'ordre de l'équation. [On doit aussi pouvoir les résoudre en posant $y = u^\alpha$ pour se ramener à une équation homogène (?).]
a. $x^3y'' = (y - xy')^2$

19. Résoudre les équations d'Euler suivantes en posant $x = e^t$ pour se ramener à une équation linéaire à coefficients constants. [On peut parfois se ramener à une équation d'Euler par un changement de variable affine.] [Une autre manière de résoudre les équations d'Euler est de chercher des solutions de la forme x^α et de faire varier les constantes.]
a. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
b. $x^2y'' - xy' + 2y = \sin x$
c. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$
d. $xy'' - y' - 3y/x = -16 \ln x/x^2$
e. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$
f. $(x-1)^2y'' - (x-1)y' + y = \ln x$ (?)

20. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide de séries entières.
a. $2xy'' - y' + x^2y = 0$
b. $xy'' + 2y' + \omega^2xy = 0$ [On peut aussi poser $z = xy$]

21. Résoudre les équations différentielles suivantes en effectuant un changement de variable ou d'inconnue judicieux.
a. $(y' - y)^2 = y' - 2y$, $t = y' - y$.

22. a. $f'(x) = f(1/x)$ [Dériver]
b. $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$
c. Trouver les fonctions f continues telles que

$$\int_0^x f(t)(2x - 3t)\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

[Remarquer que c'est linéaire (affine?), chercher une solution particulière, puis la solution générale.]

23. a. $|x|\,y' + (x-1)y = x^2$
b. $y'' - y = |\mathrm{Th}\,x|$
c. $y'' + y = |x| + 1$
d. $y'' + y = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| + \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$

24. a. $2y'' + 3y = 5\,|y|$
b. $y'' = |y|$
c. $y' = |y|$

25. Résoudre les systèmes différentiels suivants.
a. ...

26. a. Trouver des exercices avec le Wronskien (théorème de Sturm).
b. Trouver d'autres exercices théoriques.