# Groupoïde fondamental d'un topos


Vincent Zoonekynd

d'après O. Leroy


23 février 1998


**Résumé**

Nous voulons généraliser la théorie de Galois de [SGA1], *i.e.*, l'étude des catégories d'ensembles finis munis de l'action continue d'un groupe profini, $(\varprojlim \pi_i)$-$\mathfrak{ens}$. La première généralisation consiste à considérer le topos engendré par une telle catégorie, *i.e.*, le topos classifiant d'un groupe profini, $(\varprojlim \pi_i)$-$\mathfrak{Ens}$, que l'on peut aussi écrire comme une 2-limite projective de topos classifiants de groupes finis, $\underleftarrow{2\text{-lim}}(\pi_i\text{-}\mathfrak{Ens})$. Il semble ensuite naturel de ne pas se restreindre aux groupes finis, mais de prendre des groupes quelconques ou même des groupoïdes. Les catégories que nous obtenons sont donc les 2-limites projectives de topos classifiants de groupoïdes, nous les appellerons topos localement galoisiens.

Plus précisément, nous montrons comment associer une telle catégorie à tout topos localement connexe, de manière 2-universelle. On pourra la voir comme le groupoïde fondamental.


## 1 Topos

En géométrie, on peut effectuer la plupart des raisonnements en termes de faisceaux. Il apparaît donc pertinent de s'intéresser aux catégories de faisceaux sur un espace topologique, ou de manière plus générale sur un site, et de les considérer comme des objets géométriques, comme une généralisation de la notion d'espace topologique. Nous définissons alors un **topos** comme une catégorie de faisceaux sur un petit site.

La donnée du site ne fait pas partie du topos : un même topos peut provenir de plusieurs sites différents. Par exemple, la topologie sur un site induit une topologie sur son topos de faisceaux qui n'est autre que la topologie canonique. Les familles couvrantes sont les familles épimorphiques, qui sont donc épimorphiques universelles. Les faisceaux sur un topos sont tous représentables : à équivalence près, on retombe sur le même topos.

On peut caractériser les topos sans faire intervenir de site : c'est le *critère de Giraud.* Avant de pouvoir l'énoncer, nous avons besoin de quelques définitions. Considérons une catégorie $\mathfrak{C}$.

On dit qu'une somme directe $\coprod_{i \in I} E_i$ est **disjointe** si les inclusions

$$E_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} E_i$$

sont des monomorphismes et si pour tout $i \neq j$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E_k \arrow[d] \\ E_j \arrow[r] & \coprod_{i \in I} E_i. \end{tikzcd}$$

On dit qu'un diagramme $R \rightrightarrows E \longrightarrow F$ est **exact** s'il identifie $R$ au produit $E \times_F E$ et si $F$ est le conoyau de la double flèche. Cela revient à demander que l'on ait un diagramme cartésien et cocartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & E \arrow[d] \\ E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

On dit qu'un tel diagramme est **universellement exact** s'il le demeure même après changement de base.

Une **relation d'équivalence** est un monomorphisme $R \hookrightarrow E \times E$ tel que pour tout objet $T$ on ait une relation d'équivalence

$$\mathrm{Hom}(T, R) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(T, E \times E) \simeq \mathrm{Hom}(T, E) \times \mathrm{Hom}(T, E).$$

Un **quotient** de cette relation d'équivalence est un diagramme exact

$$R \rightrightarrows E \longrightarrow E/R.$$

On dit qu'une classe d'objets $\mathfrak{K} \subset \mathrm{Ob}\, \mathfrak{C}$ **engendre** la catégorie $\mathfrak{C}$ si pour tout couple de morphismes distincts $X \rightrightarrows Y$ il existe un objet $Z$ de $\mathfrak{K}$ et un morphisme $Z \longrightarrow X$ tel que les composés $Z \longrightarrow X \rightrightarrows Y$ soient distincts. Dire qu'un topos est engendré par une classe d'objets revient à dire qu'il est équivalent au topos des faisceaux sur la sous-catégorie pleine correspondante munie de la topologie induite par la topologie canonique.

Le critère de Giraud s'énonce alors ainsi.

***Les topos sont les catégories vérifiant les propriétés suivantes.***

(*i*) ***Les limites projectives finies sont représentables ;***

(*ii*) ***les petits coproduits sont disjoints et commuttent aux produits fibrés ;***

(*iii*) ***Pour tout épimorphisme*** $E \longrightarrow F$***, on a un diagramme universellement exact*** $E \times_F E \rightrightarrows E \longrightarrow F$;

(*iv*) ***toute relation d'équivalence possède un quotient ;***

(*v*) ***il existe une petite famille génératrice.***

Un **morphisme de topos** $f : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ est un couple de morphismes adjoints $f^* \dashv f_*$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, bend left, "f^*"] & \mathscr{T}' \arrow[l, bend left, "f_*"] \end{tikzcd}$$

tel que le foncteur « image réciproque » $f^*$ soit exact à gauche, *i.e.*, commute aux limites projectives finies. Un **2-morphisme de topos** est une transformation naturelle entre les foncteurs « image directe ». Mais comme, pour deux morphismes de topos $f, g : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$, on a une bijection cannique $\mathrm{Hom}(f_*, g_*) \simeq \mathrm{Hom}(g^*, f^*)$, il revient au même de dire qu'un 2-morphisme de topos est une transformation naturelle entre les foncteurs « image réciproque », mais dans l'autre direction. Les topos forment une 2-catégorie. Si l'on remplace la définition d'un morphisme de topos comme la donnée du foncteur « image réciproque » seul, *i.e.*, d'un foncteur commutant aux petites limites inductives et aux limites projectives finies, on obtient une 2-catégorie équivalente.

Un **point** d'un topos $\mathscr{T}$ est un morphisme depuis le topos des faisceaux sur un point, *i.e.*, depuis la catégorie des ensembles, $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathscr{T}$. Un **foncteur fibre** est le foncteur « image réciproque » d'un point.

Un objet d'un topos est **connexe** s'il ne peut pas s'écrire comme somme disjointe de deux objets non vides. [1]

Les espaces topologiques localement connexes sont ceux dont la topologie est engendrée par les ouverts connexes. De même, un topos est **localement connexe** s'il est engendré par ses objets connexes. Il revient au même de demander qu'il existe un foncteur « composantes connexes », *i.e.*, un adjoint à gauche du foncteur « objet constant ». [2] En particulier, tout objet
[L, 1.5] se décompose *de manière unique* (à isomorphisme près) en somme disjointe

1. On peut aussi définir le notion de **topos connexe** : c'est un topos dont l'objet final est connexe. Il revient au même de demander que le topos n'est pas 2-produit de topos non vides ; le 2-produit pouvant se définir comme $\widetilde{\mathscr{T}_1 \coprod \mathscr{T}_2}$.

2. Rappelons que le foncteur objet constant associe à un ensemble une somme disjointe

d'objets connexes.

Considérons le topos des faisceaux sur un espace topologique. Un faisceau $\mathscr{F}$ est trivialisé par un ouvert $U$ si sa restriction $\mathscr{F}|_U$ est un faisceau constant sur $U$. Si l'on voit $U$ comme un faisceau représentable, sa restriction peut s'écrire sous forme de produit fibré, $\mathscr{F}|_U = \mathscr{F} \times U$ (au dessus de l'objet final du topos, *i.e.*, l'espace topologique tout entier).

Dans un topos $\mathscr{T}$, on dit qu'un objet $\mathscr{F}$ est **trivialisé** par un objet $U$ si sa restriction $\mathscr{F}|_U = \mathscr{F} \times U$ est un objet constant sur $U$, *i.e.*, isomorphes à une somme disjointe de copies de $U$, $\mathscr{U}|_U = I_U = \coprod_{i\in I} U$.

On dit qu'un objet est **localement constant** si les objets qui le trivialisent recouvrent l'objet final. Nous verrons plus loin que les objets d'un topos classifiant de groupoïde sont localement constants.

Quand on étudie les extensions de corps ou les revêtements d'un espace topologique, la notion d'objet galoisien est fondamentale. Rappelons qu'un revêtement galoisien est un revêtement connexe dont le groupe d'automorphismes agit transitivement sur les fibres. L'utilité de cette notion est double. Tout d'abord, étant donné un revêtement (connexe), il existe un revêtement galoisien qui le domine. En d'autre termes, les revêtements galoisiens forment un système cofinal parmi les revêtements ; c'est le contenu du lemme 2.19 plus bas. En termes de topos, on peut dire que le topos de (sommes disjointes de) revêtements est engendré par les revêtements galoisiens. D'autre part, les seuls morphismes entre objets galoisiens sont des isomorphismes. C'est cette propriété que l'on utilise dans [SGA1] pour définir le progroupe fondamental : les revêtement forment un système projectif, donc leurs monoïdes d'endomorphismes aussi, mais pas leurs groupes d'automorphismes. Par contre, les revêtements galoisiens forment un système projectif (cofinal dans le précédent) et leurs groupes d'automorphismes aussi : ils permetent de définir le pro-groupe fondamental. Ces quelques remarques justifient les définitions suivantes.

Un objet $Y$ est **galoisien** s'il est connexe, non vide localement constant et si c'est un pseudo-torseur sous son groupe d'automorphismes, *i.e.*, si on a

---

de copies de l'objet fianl indexées par cet ensemble.

$$\begin{cases} \mathfrak{Ens} & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ I & \longmapsto & I_{\mathscr{T}} = \coprod_{i\in I} e \end{cases}$$

On pourra remarquer que le foncteur « objet constant » possède toujours un adjoint à droite et commute aux petites limites projectives : en d'autres termes, pour tout topos $\mathscr{T}$, on a un morphisme de topos $\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ vers la catégorie des ensembles, qui est donc un topos 2-final.

un isomorphisme
$$(\operatorname{Aut} Y)_{\mathscr{T}} \times Y \longrightarrow Y \times Y.$$
On dit qu'un topos est **localement galoisien** s'il est engendré par ses objets galoisiens.

## 2 Groupoïde fondamental

[L, 2.4.1] ***Soit $\mathscr{T}$ un topos localement constant. La sous-catégorie pleine*** $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ ***des sommes disjointes d'objets localement constants***[3] ***est un topos localement galoisien et le foncteur d'inclusion*** $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ ***induit un morphisme de topos*** $\mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ ***qui est*** 2***-universel parmi les morphismes vers un topos localement galoisien.***

Nous allons vérifier les différents points du critère de Giraud, un par un.

[L, 2.4.1] **2.1** *Une limite projective finie dans $\mathscr{T}$ d'objets de* $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ *y est encore.*

Nous allons d'abord démontrer le résultat pour les objets localement constants, avant de passer à leurs sommes directes.

**2.2** *Les objets connexes qui trivialisent un objet localement constant engendrent le topos.*

Soient $L$ un objet localement constant et $(C_i)_{i \in I}$ la famille des objets connexes non vides qui trivialisent $L$. Nous savons déjà, d'après la définition d'un objet localement constant, que ces objets recouvrent l'objet final. Nous allons montrer qu'en fait, ils engendrent le topos.[4] Soient $X \rightrightarrows Y$ deux morphismes distincts. Comme le topos est engendré par ses objets connexes, il existe un objet connexe $C$ et un morphisme $C \longrightarrow X$ tel que les composés $C \longrightarrow X \rightrightarrows Y$ soient distincts. Dans un topos, les familles épimorphiques sont universelles : elles restent épimorphisques après produit fibré. En particulier, comme la famille $(C_i \longrightarrow e)_{i \in I}$ est épimorphique, il en va de même pour $(C_i \times C \longrightarrow C)_{i \in I}$. Il existe donc un $i \in I$ tel que les composés $C_i \times C \longrightarrow C \longrightarrow X \rightrightarrows Y$ soient distincts. Grace à la projection $C_i \times C \longrightarrow C_i$ et au lemme suivant, on voit que $C_i \times C$ trivialise $L$ et fait donc partie des $(C_i)_{i \in I}$. 2.2 □

4. C'est un résultat plus général : dire qu'une famille $\mathfrak{K}$ d'objets engendre le topos revient à dire que pour tout objet $X$, la famille des morphisme de but $X$ et de source dans $\mathfrak{K}$ est épimorphique.

[L, 2.1.2($i$)] **2.3** *Si un objet $C$ trivialise un objet $L$, alors il est trivialisé par les objets « plus petits »,* i.e., *les objets $D$ tels qu'il existe un morphisme $D \longrightarrow C$.*

Comme $C$ trivialise $L$, on voit que $C \times L$ est un objet constant sur $C$, *i.e.*, une somme disjointe de copies de $C$ ; on notera $C \times L \simeq I_C$, où $I$ est un ensemble. Les deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} D \times L \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \times L \arrow[d] \\ D \arrow[r] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I_D \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & I_C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

induisent un isomorphisme $D \times L \simeq I_D$ ; en d'autres termes, $D$ trivialise $L$.
2.3 □

**2.4** *Les objets connexes qui trivialisent un ensemble fini d'objets localement constants engendrent encore le topos.*

Soit $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'objets localement constants et $(C_{i,j})_j$ les objets connexes non vides qui trivialisent $I_i$. Les produits $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{i,j_i}$ trivialisent tous les $L_i$. En utilisant le fait qu'une famille épimorphique est universelle, on montre qu'ils recouvrent l'objet final. Comme on veut des objets connexes, on prend leurs composantes connexes. Finalement, on montre comme précedemment qu'ils engendrent le topos. 2.4 □

**2.5** *Une limite projective finie d'objets localement constants est encore localement constante.*

Soient $(X_i)_{i \in I}$ un petit système projectif d'objets localement constants et $C$ un objet connexe non vide qui les trivialise tous, *i.e.*, les $C_i \times C$ sont constants sur $C$, *i.e.*, il existe des ensembles $I^i$ tels que $C_i \times C \simeq I^i_C$. Remarquons alors que

$$C \times (\varprojlim X_i) \simeq \varprojlim (C \times X_i),$$

car le produit fibré est une limite projective et commute donc aux limites projectives, puis

$$\begin{aligned} C \times (\varprojlim X_i) &\simeq \varprojlim (I^i_C) \\ &\simeq (\varprojlim I^i)_C, \end{aligned}$$

car le foncteur « objet constant » possède un adjoint à gauche (le foncteur « composantes connexes », car notre topos est localement connexe) et commute donc aux limites projectives. Comme les objets qui trivialisent tous les objets du système projectif recouvrent l'objet final et trivialisent la limite, celle-ci est localement constante. 2.5 □

Il reste à voir en quoi le résultat pour les objets localement constants permet d'obtenir celui pour les sommes disjointes d'objets localement constants. 2.1 □

**2.6** *Les sommes directes de* SLC $\mathscr{T}$ *sont disjointes et commuttent aux produits fibrés.*

Cela résulte du fait que les sommes directes et les produits fibrés sont les mêmes que ceux de $\mathscr{T}$, par construction de la sous-catégorie et d'après le lemme 2.1, respectivement. 2.6 □

**2.7** *Pour tout épimorphisme* $E \longrightarrow F$ *de* $\mathscr{T}$*, on a un diagramme universellement exact* $E \times_F E \rightrightarrows E \longrightarrow F$.

On sait déjà que si $E \longrightarrow F$ est un épimorphisme de $\mathscr{T}$ entre objets de SLC $\mathscr{T}$, on a un diagramme universellement exact $E \times_F E \rightrightarrows E \longrightarrow F$ dans $\mathscr{T}$. Ce diagramme est en fait exact dans SLC $\mathscr{T}$, car les produits fibrés y sont les mêmes d'après le lemme 2.1 et car l'exactitude à droite s'exprime par une propriété universelle vérifiée pour tous les morphismes du topos, qui reste donc vraie si on se restreint aux morphismes de SLC $\mathscr{T}$. Il suffit donc de voir qu'un épimorphisme dans SLC $\mathscr{T}$ est encore un épimorphisme dans SLC $\mathscr{T}$. Pour cela, nous allons étudier plus précisément les objets localement constants et les diverses constructions que l'on peut effectuer avec eux, en les considérant comme des faisceaux sur un site générateur.

On dit qu'un préfaisceau sur une catégorie $\mathfrak{C}$ est **localement constant** s'il transforme tout morphisme en un isomorphisme. En d'autres termes, il induit un préfaisceau sur le groupoïde $\pi\mathfrak{C}$ associé à la catégorie, obtenu en inversant tous les morphismes. Les deux lemmes suivants justifient cette appellation.

**2.8** *Soit* $\mathfrak{S}$ *une sous-catégorie génératrice de* $\mathscr{T}$ *constituée d'objets connexes non vides. Un objet est trivialisé par tous les éléments de* $\mathfrak{S}$ *si et seulement s'il définit un préfaisceau localement constant sur* $\mathfrak{S}$.

[L, 2.2.1] Soit $\mathrm{Hom}(\cdot, Z)$ un préfaisceau représentable localement constant. On veut
[L, 2.1.3] montrer qu'il est représenté par un objet trivialisé par tous les objets $C$ de $\mathfrak{S}$,

*i.e.*, montrer que l'on a des isomorphismes $C \times Z \simeq I_C$. Plus précisément, on peut donner cet ensemble $I$ : c'est $\mathrm{Hom}(C, Z)$. Pour établir

$$\mathrm{Hom}(C, Z)_C \simeq C \times Z,$$

il suffit de démontrer l'isomorphisme des préfaisceaux correspondants,

$$\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Hom}(C, Z)_C) \simeq \mathrm{Hom}(D, C \times Z),$$

en d'autres termes,

$$\mathrm{Hom}(D, C) \times \mathrm{Hom}(C, Z) \simeq \mathrm{Hom}(D, C) \times \mathrm{Hom}(D, Z).$$

Mais comme $Z$ est localement constant, une telle bijection est donnée par

$$(f, g) \longmapsto (f, g \circ f).$$

[L, 2.1.2($ii$)] Réciproquement, montrons qu'un objet $Z$ trivialisé par tous les objets de $\mathfrak{S}$ définit un préfaisceau localement constant. Soit $D \longrightarrow C$ un morphisme de $\mathfrak{S}$, on veut montrer que $\mathrm{Hom}(C, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D, Z)$ est bijective. Comme $C$ trivialise $Z$, il existe un ensemble $I$ tel que $C \times Z \simeq I_C$. Se donner un morphisme $C \longrightarrow Z$ revient à se donner une section de $C \times Z \simeq I_C \longrightarrow C$. De même, se donner un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

revient à se donner des sections qui font commutter le carré suivant

$$\begin{tikzcd} D \times Z \arrow[r] \arrow[d] & C \times Z \arrow[d] \\ D \arrow[r] \arrow[u, bend left] & C \arrow[u, bend right] \end{tikzcd} \qquad i.e., \qquad \begin{tikzcd} I_D \arrow[r] \arrow[d] & I_C \arrow[d] \\ D \arrow[r] \arrow[u, bend left] & C. \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

On a donc des bijections $I \simeq \mathrm{Hom}(C, Z) \simeq \mathrm{Hom}(D, Z)$. 2.8 □

[L, 2.2.2] **2.9** *Soit $\mathfrak{S}$ une sous-catégorie génératrice de $\mathscr{T}$ constituée d'objets connexes non vides. Un préfaisceau localement constant sur $\mathfrak{S}$ est en fait un faisceau, en particulier il est représentable par un objet de $\mathscr{T}$, localement constant et trivialisé par tous les objets de $\mathfrak{S}$.*

Soient $F$ un préfaisceau localement constant, $U$ un objet de $\mathfrak{S}$ et $R$ un crible couvrant $U$, *i.e.*, contenant une famille épimorphique. L'inclusion de préfaisceaux $R \hookrightarrow U$ induit une application

$$\mathrm{Hom}(U, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, F).$$

Vérifions qu'l s'agit d'une bijection.

Cette application est injective. En effet, soient deux morphismes distincts $U \rightrightarrows F$. Comme le crible contient une famille épimorphique, il existe un morphisme $X \longrightarrow U$ dans $R$ tel que les composés $X \longrightarrow U \rightrightarrows F$ soient distincts. Dire que ce morphisme est dans $R$ revient à dire que l'on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F, \\
R \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

donc les morphismes $R \longrightarrow U \rightrightarrows F$ sont distincts.

[L, 2.2.2] Cette application est surjective. Soit $t : R \longrightarrow F$ un morphisme, on cherche à construire un morphisme $U \longrightarrow F$, *i.e.*, un élément de $F(U)$ dont il proviendrait. Pour tout morphisme $V \longrightarrow R$, le composé $t \circ f$ est un

$$\begin{tikzcd}
U & \\
R \arrow[u] \arrow[r, "t"] & F \\
V \arrow[u, "f"] &
\end{tikzcd}$$

élément de $F(V)$, mais $F(V) \simeq F(V)$, il lui correspond donc un élément de $F(U)$, que nous noterons $x(V, f)$. Nous allons montrer que cet élément est indépendant de $f$ et $V$.

Étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[dr, "f_0"] \arrow[d] & & \\
V_1 \arrow[r, "f_1"'] & R \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(V_0) \arrow[dr, "\sim"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \\
F(V_1) \arrow[r, "\sim"'] & F(U)
\end{tikzcd}$$

or ce sont ces isomorphismes qui permettent de définir $x(V_0, f_0)$ et $x(V_1, f_1)$ : il s'agit donc du même élément de $F(U)$. Si on a deux morphismes

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] V_0 \arrow[dr, "f_0"] & \\ & R \\ V_1 \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

on est tenté de considérer

$$\begin{tikzcd} & V_0 \arrow[dr, "f_0"] & & \\ V_0 \times_U V_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & R \arrow[r] & U. \\ & V_1 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

et d'appliquer le raisonnement précédent. Le problème, c'est que $V_0 \times_U V_1$ peut être vide. Nous allons maintenant montrer que le graphe de la relation « $V_i \times_U V_j \neq \varnothing$ » est connexe. 2.9 □

[L, 1.3] **2.10** *Soit $(V_i \longrightarrow U)_{i \in I}$ une famille épimorphique depuis des objets non vides. Si $U$ est connexe et non vide, alors le graphe $R \subset I \times I$ de la relation « $V_i \times V_j$ n'est pas vide » est connexe.*

Soit $I = I_1 \coprod I_2$ une partition de $I$ telle que pour tout $i \in I_1$ et tout $j \in I_2$, le produit $V_i \times_U V_j$ soit vide. Notons $U_1$ et $U_2$ l'image de $\coprod_{i \in I_1} V_i$ et $\coprod_{j \in I_2} V_j$ dans $U$. On a $U = U_1 \coprod U_2$, donc, comme les $V_i$ sont non vides, $I_1 = \varnothing$ ou $I_2 = \varnothing$. 2.10 □

Cette description des objets localement constants en tant que préfaisceaux localement constants sur un site générateur permet d'effectuer certaines constructions très simplement sur ces objets. Ainsi, l'**image** d'un morphisme $L \longrightarrow M$ d'objets localement constants est défini comme le préfaisceau sur le site générateur $\mathfrak{S}$ des objets connexes non vides trivialisant $L$ et $M$ de la manière suivante, [L, 2.2.4(*iii*)]

$$\begin{cases} \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ C & \longmapsto & \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(C, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M)). \end{cases}$$

Comme ce préfaisceau est localement constant, c'est un faisceau et il est représentable par un objet du topos.

De même, si $K \hookrightarrow L$ est un sous-objet localement constant d'un objet localement constant, on peut définir la différence $L \setminus K$ comme le préfaisceau

$$\begin{cases} \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ C & \longmapsto & \mathrm{Hom}(C, L) \setminus \mathrm{Hom}(C, K) \end{cases}$$

sur le site générateur $\mathfrak{S}$ des objets connexes non vides qui trivialisent $L$ et $K$. Comme précédemment, il s'agit d'un préfaisceau localement constant, c'est donc un faisceau et il est représentable par un objet du topos.

[L, 2.2.6] **2.11** *Tout morphisme d'un objet localement constant non vide dans un objet localement constant connexe est un épimorphisme.*

En effet, si $K = \mathrm{Im}(M \longrightarrow L)$, on a $L = K \coprod (L \setminus K)$. 2.11 □

**2.12** *Les épimorphismes de* SLC $\mathscr{T}$ *sont encore des épimorphismes dans* $\mathscr{T}$.

Dire qu'un morphisme $L \longrightarrow M$ d'objets localement constants est un épimorphisme revient à dire que son image est égale à $M$. (On peut définir l'image d'un morphisme quelconque dans $\mathscr{T}$, comme précédemment, mais le préfaisceau que l'on obtient n'est pas nécessairement un faisceau : in faut prendre le faisceau associé.) Or cette caractérisation des épimorphismes est valable dans $\mathscr{T}$ comme dans SLC $\mathscr{T}$. 2.12 □

Ceci établit le troisième point du critère de Giraud. 2.7 □

**2.13** *Le quotient d'une relation d'équivalence de* SLC $\mathscr{T}$ *est encore dans* SLC $\mathscr{T}$.

Avant de commencer, nous avons besoin de quelques résultats sur les sous-objets d'un objet localement connexe.

[L, 2.2.5($i$)] **2.14** *Un sous-objet localement constant $K$ d'un objet localement constant $L$ est somme disjointe de composantes connexes de $L$.*

Il suffit d'écrire $L = K \coprod (L \setminus K)$ et de tout décomposer en composantes connexes. Par unicité de la décomposition de $L$ en somme de composantes connexes, on voit que $K$ est somme disjointe de composantes de $L$. 2.14 □

[L, 2.2.5($ii$)] **2.15** *Une somme disjointe de composantes connexes d'un objet localement constant est localement constant.*

Soit $L = K \coprod K'$ un objet localement constant ; on veut montrer que $K$ est localement constant. Soit $C$ un objet connexe non vide trivialisant $L$. Comme les produits fibrés commuttent aux sommes directes, on peut écrire

$$C \times L = (K \times C) \coprod (K \times C).$$

Mais $C \times L$ est un objet constant sur l'objet *connexe* $C$, sa décomposition en composantes connexes est donc une somme de copies de $C$. D'après l'unicité de cette décomposition, on voit que $K \times C$ est lui aussi une somme de copies de $C$ : ainsi $K$ est trivialisé par $C$. Comme les objets connexes non vides qui trivialisent $L$ trivialisent aussi $K$, on en déduit qu'il est localement constant. 2.15 □

**2.16** *Le quotient d'une relation d'équivalence localement constante est localement constant.*

Le quotient d'une relation d'équivalence est un type particulier de limite inductive finie. Il suffit donc de s'intéresser à ces limites.

[L, 2.2.4($ii$)] **2.17** *Une limite inductive finie d'objets localement constants est localement constante.*

En effet, soit $(L_i)_{i \in I}$ un système inductif fini. Les objets connexes non vides qui trivialisent les $L_i$ forment un site générateur $\mathfrak{S}$. On définit un préfaisceau sur $\mathfrak{S}$,

$$\begin{cases} \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ C & \longmapsto & \varinjlim \operatorname{Hom}(C, X_i). \end{cases}$$

Il s'agit d'un préfaisceau localement constant, donc d'un faisceau : il est représentable par un objet localement constant du topos. C'est toujours la limite inductive, car c'est déjà la limite inductive dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathfrak{S}$, qui contient $\mathscr{T}$ (à équivalence près). 2.17 □

Ceci montre que le quotient d'une relation d'équivalence dans la catégorie des objets localement constants est localement constant. 2.16 □

Il s'agit maintenant de passer du résultat pour les relations d'équivalence
[L, 2.4.2($ii$)] localement constantes à celui pour des relations d'équivalence de SLC $\mathscr{T}$.

Le quotient dans $\mathscr{T}$ d'une relation d'équivalence $R \hookrightarrow A \times A$ de SLC $\mathscr{T}$ est un diagramme cartésien et cocartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d] \\ A \arrow[r] & Q. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

Nous voulons montrer que $Q$ est en fait dans SLC $\mathscr{T}$. Écrivons $A$ comme somme disjointe d'objets connexes de SLC $\mathscr{T}$ (ou de $\mathscr{T}$, c'est pareil), $A = \coprod_{i\in I} C_i$. Posons
$$R_{i,j} = C_i \underset{Q}{\times} C_j = R \underset{A\times A}{\times} (C_i \times C_j).$$
C'est un produit fibré d'objets de SLC $\mathscr{T}$, il y est donc aussi. De plus, $R_{i,j}$ est un sous-objet de $C_i \times C_j$, c'est donc[5] une somme directe de composantes connexes de $C_i \times C_j$ : il est, lui aussi, localement constant.

Soit $Q_i$ l'image de $C_i$ dans $Q$. On a $R_{i,i} = C_i \underset{Q}{\times} C_i = C_i \underset{Q_i}{\times} C_i$, donc un diagramme cartésien et cocartésien

$$\begin{tikzcd} R_{i,i} \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[d] \\ C_i \arrow[r] & Q_i. \end{tikzcd}$$

Ainsi, $Q_i$ est le quotient de la relation d'équivalence localement constante $R_{i,i} \hookrightarrow C_i \times C_i$, il est localement constant.

On peut alors conclure : si $R_{i,j} = \varnothing$, alors $Q_i \times Q_j = \varnothing$. Par contre, si $R_{i,j}$ est non vide, on a des épimorphismes

$$\begin{tikzcd} & C \\ R_{i,j} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C_j \end{tikzcd}$$

et les sous-objets $Q_i$ et $Q_j$ de $Q$ coïncident. Commes les $Q_i$ sont des sous-objets disjoints localement constants qui recouvrent $Q$, leur somme disjointe coïncide avec $Q$ qui est donc dans SLC $\mathscr{T}$.

Finalement, nous avons montré que le quotient d'une relation de SLC $\mathscr{T}$ y est encore : c'est l'avant-dernier point du critère de Giraud. 2.13 □

**2.18** *La sous-catégorie* SLC $\mathscr{T}$ *possède une petite famille génératrice.*

Ce dernier point du critère de Giraud peut sembler anodin, il n'en est rien. Nous allons montrer que SLC $\mathscr{T}$ est engendré par les objets galoisiens de $\mathscr{T}$ (qui coïncident d'ailleurs, nous le verrons un peut plus loin, avec les objets galoisiens de SLC $\mathscr{T}$) et qu'ils forment une petite famille.

[L, 2.4.6] **2.19** *Soit $L$ un objet localement constant, il existe un objet galoisien le trivialisant.*

5. Il faudrait détailler un peu.

Soit $C$ un objet connexe trivialisant $L$ : on a un isomorphisme $C \times L \simeq I_C$ où $I = \mathrm{Hom}(C, L)$. Cet ensemble $I$ ne dépend pas vraiment du choix d'un objet connexe non vide $C$ trivialisant $L$ : nous avons vu (lemme 2.3) que s'il existe un morphisme $D \longrightarrow C$, alors $D$ trivialise aussi $L$ et $\mathrm{Hom}(D, L) \simeq \mathrm{Hom}(C, L)$. De plus, si on suppose que l'objet final de $\mathscr{T}$ est connexe (cette hypothèse est licite : on peut supposer $L$ connexe, on peut montrer (voir lemme 2.26) que son image dans l'objet final en est une composante connexe $V$ et il suffit alors de se placer dans $\mathscr{T}/V$), le lemme 2.10 nous dit que l'on a une telle bijection même en l'absence de morphisme $D \longrightarrow C$. En d'autre termes, $L$ est localement isomorphe à $I_{\mathscr{T}}$.

[L, 2.4.4] Cette remarque nous invite à considérer le préfaisceau

$$\underline{\mathrm{Isom}}(L, I_{\mathscr{T}}) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ C & \longmapsto & \mathrm{Isom}(L \times C, I_C) \end{array} \right.$$

sur le site générateur $\mathfrak{S}$ des objets connexes non vides trivialisant $L$. Il s'agit d'un préfaisceau localement constant, c'est donc un faisceau et il est représentable par un objet $T$ qui est, lui aussi, trivialisé par tous les objets de $\mathfrak{S}$. En particulier, il est localement constant. Nous allons voir que cet objet, ou au moins ses composantes connexes, est galoisien.

Commençons par remarquer que $T$ est un pseudo-torseur sous le groupe $\mathrm{Aut}\, I$ des bijections de $I$, *i.e.*,

$$(\mathrm{Aut}\, I)_{\mathscr{T}} \times T \simeq T \times T.$$

En effet, pour le voir, il suffit de considérer les préfaisceaux localement constants correspondants,

$$(\mathrm{Aut}\, I) \times \mathrm{Hom}(C, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, T \times T) \simeq \mathrm{Hom}(C, T) \times \mathrm{Hom}(C, T)$$

*i.e.*,

$$(\mathrm{Aut}\, I) \times \mathrm{Isom}(L \times C, I_C) \longrightarrow \mathrm{Isom}(L \times C, I_C) \times \mathrm{Isom}(L \times C, I_C)$$

qui est bien une bijection. En particulier, comme on a un monomorphisme $\mathrm{Aut}\, I \hookrightarrow \mathrm{Aut}\, T$, on en déduit un épimorphisme

$$(\mathrm{Aut}\, T)_T \times T \twoheadrightarrow T \times T.$$

On dira que $\mathrm{Aut}\, T$ opère **transitivement** sur $T$. Ce n'est pas un monomorphisme en général, mais cela le devient si on se restreint à une composante connexe de $T$, d'après le lemme suivant. 2.19 □

[L, 2.4.5] **2.20** *Si le groupe des automorphismes d'un objet localement constant $T$ agit transitivement sur cet objet, alors ses composantes connexes sont galoisiennes.*

Soit $K$ une composante connexe de $T$. Remarquons que $\operatorname{Aut} T$ agit sur l'ensemble des composantes connexes de $T$. Posons alors

$$H = \{ \alpha \in \operatorname{Aut} T \;:\; \alpha K = K \}.$$

On a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
H_T \times K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & K \times K \arrow[d] \\
(\operatorname{Aut} T)_{\mathscr{T}} \times T \arrow[r, two heads] & T \times T.
\end{tikzcd}$$

Comme la ligne du bas est un épimorphisme et comme les épimorphismes sont universels dans un topos, la ligne du haut est aussi un épimorphisme.

Il reste à voir que c'est aussi un monomorphisme (car dans un topos, un morphisme qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme est un isomorphisme). À ce niveau, j'ai un léger problème : je ne comprends pas la démonstration de [L]. L'assertion résulterait « trivialement » du résultat suivant : Si $f, g : L \rightrightarrows M$ sont deux morphisme d'un objet localement constant *connexe* $L$ vers un objet localement constant $M$ et si le noyau $\operatorname{Ker}(f, g)$ est non vide, alors $f = g$. Si quelqu'un voit pourquoi cela nous dit que l'on a bien un monomorphisme, qu'il me le dise. Je propose donc une autre démonstration, un peu plus lourde.

Soit $\mathfrak{S}$ le site générateur des objets connexes non vides qui trivialisent $K$. On peut travailler avec les préfaisceaux localement constants sur $\mathfrak{S}$, *i.e.*, dans le topos classifiant du groupoïde $\pi\mathfrak{S}$. On a supposé plus haut que le topos était connexe, cela revient à supposer que le groupoïde est connexe. À équivalence près, il s'agit donc du topos classifiant d'un groupe. Dans ce cadre, l'assertion est ensembliste et se vérifie immédiatement : si $K$ est un objet connexe et si $(\operatorname{Aut} K) \times K \twoheadrightarrow K \times K$ est un épimorphisme, alors c'est aussi un monomorphisme. 2.20 □

[L, 2.4.7] **2.21** *La sous-catégorie* $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ *est engendrée par les objets galoisiens de* $\mathscr{T}$

Soit $L$ une somme disjointe d'objets localement constants ; considérons ses composantes connexes,

$$L = \coprod_{i \in I} L_i.$$

Pour chaque $L_i$, il existe un objet galoisien $Y_i$ qui le trivialise, on a donc un morphisme $Y_i \longrightarrow L_i$. Or, $Y_i$ et $L_i$ sont localement constants et $L_i$ est connexe, il s'agit donc d'un épimorphisme. On a donc une famille épimorphisque $(Y_i \longrightarrow L)_{i \in I}$. 2.21 □

[L, 2.4.9] **2.22** *Les objets galoisiens de $\mathscr{T}$ forment une petite famille (à équivalence près).*

Soit $\mathfrak{S}$ une petite famille génératrice de $\mathscr{T}$. Quite à remplacer les objets de $\mathfrak{S}$ par leurs composantes connexes, on peut supposer qu'ils sont connexes non vides (cela reste une petite famille). Les objets de $\mathscr{T}$ sont (à équivalence près) les faisceaux sur $\mathfrak{S}$, munie de la topologie induite par la topologie canonique de $\mathscr{T}$. Nous voulons montrer que les préfaisceaux sur $\mathfrak{S}$ représentables par un objet galoisien forment une petite famille. Pour cela, il suffit de voir que pour tout objet galoisien $Y$ et pour tout objet $U$ de $\mathfrak{S}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(U, Y)$ a un cardinal indépendant de $U$ et $Y$. En effet, on pourra alors supposer que $\mathrm{Hom}(U, Y)$ est inclus dan un ensemble fixe $I$ et les préfaisceaux représentables par des objets galoisiens pourront alors être vus comme des foncteurs entre des petites catégories, de $\mathfrak{S}$ vers la catégorie des sous-ensembles de $I$, ils formeront donc une petite famille.

Notons $c$ le cardinal de $\mathrm{Fl}\,\mathfrak{S}$. Fixons un objet galoisien $Y$. Montrons que le cardinal de l'ensemble des flèches de but $Y$ et de source dans $\mathfrak{S}$ est plus petit que $\mathrm{Card}\,\mathrm{Hom}(U, Y) \leqslant c^{\aleph_0}$. Pour ce faire, nous allons énumérer les flèches $V \longrightarrow Y$ de manière « récursive » : on part d'une flèche $U \longrightarrow Y$ ; on considère l'ensemble $A_1$ des flèches $V \longrightarrow Y$ proches de la précédente en ce sens que $U \times_Y V \neq \varnothing$ ; puis l'ensemble $A_2$ des flèches $W \longrightarrow Y$ proches de l'une des flèches de $A_1$ et ainsi de suite. Il faudra calculer le cardinal de ces ensembles (vérifier qu'il ne dépend pas de $Y$) et s'assurer que l'on obtient bien *toutes* les flèches de $\mathfrak{S}$ dans $Y$.

Fixons un morphisme $U \longrightarrow Y$ et montrons que $\mathrm{Card}\,\mathrm{Hom}(U, Y) \leqslant c^{\aleph_0}$. Remarquons que si on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & V & \\ W \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y \\ & U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $U$, $V$ et $W$ sont dans $\mathfrak{S}$, alors il existe au plus un morphisme $V \longrightarrow Y$ qui le fasse commuter. En effet, soit $\mathrm{Hom}(V, Y)$ est vide, soit il n'est pas vide et $V$ trivialise $Y$ (d'après le lemme 2.3, car $Y$ se trivialise lui-même) et $\mathrm{Hom}(V, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, Y)$ est une bijection : le seul morphisme qui fasse commuter le diagramme est alors celui correspondant au morphisme

$W \longrightarrow U \longrightarrow Y$. Nous venons de voir que pour chaque couple de flèches

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & V \\ W \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & U \end{tikzcd}$$

il existe au plus un morphisme $V \longrightarrow Y$ tel que $U \times_Y V \neq \varnothing$ qui fasse commuter le diagramme. On obtient bien toutes les flèches voulues, car étant donnée une telle flèche, il suffit de prendre un objet $W$ tel qu'il existe un épimorphisme $W \longrightarrow U \times_Y V$. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\{\, V \longrightarrow Y \ : \ V \underset{Y}{\times} U \neq \varnothing \,\} &\leqslant \operatorname{Card}\left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small] & V \\ W \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & U \end{tikzcd} \right\} \\ &\leqslant \operatorname{Card}(\operatorname{Fl}\mathfrak{S} \times \operatorname{Fl}\mathfrak{S}) \\ &\leqslant c^2. \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, on a $\operatorname{Card} A_n = c^{2n}$, donc

$$\operatorname{Card} \bigcup_{n \geqslant 0} A_n \leqslant \sum_{n \geqslant 0} c^{2n} \leqslant c^{\aleph_0}.$$

En utilisant le lemme 2.10, on s'apperçoit que l'on obtient bien toutes les flèches de but $Y$ et de source dans $\mathfrak{S}$. Cela permet de conclure : les objets galoisiens de $\mathscr{T}$ forment une petite famille. 2.22 □

Nous venons de démontrer le dernier point du critère de Giraud : la sous-catégorie $\operatorname{SLC}\mathscr{T}$ est bien un topos. 2.18 □

[L, 2.4.3] **2.23** *Le foncteur d'inclusion* $\operatorname{SLC}\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ *induit bien un morphisme de topos.*

Pour définir un morphisme de topos, il suffit de donner le foncteur « image réciproque », *i.e.*, un foncteur dans l'autre sens qui commute aux limites projectives finies et aux petites limites inductives. Il revient au même de demander un foncteur qui commute aux limites projectives finies et qui transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques. C'est le cas de notre foncteur d'inclusion d'après les lemmes 2.1 et 2.12. 2.23 □

**2.24** *Le topos* $\operatorname{SLC}\mathscr{T}$ *est localement galoisien.*

Nous savons déjà que le topos $\operatorname{SLC}\mathscr{T}$ est engendré par les objets galoisien de $\mathscr{T}$, nous allons montrer qu'ils sont encore galoisiens dans $\operatorname{SLC}\mathscr{T}$.[6]

---

6. La démonstration de Leroy est plus compliquée : il comence par établir une caractérisation des objets galoisiens qui s'avère moins pratique que la définition : Un objet connexe est galoisien si et seulement s'il se trivialise lui-même et si son image dans l'objet final en est une composante connexe.

[L, 2.4.10($ii$)] **2.25** *les objets galoisiens de $\mathscr{T}$ sont exactement les objets galoisiens de* SLC $\mathscr{T}$.

Tout d'abord, la notion de connexité est la même dans $\mathscr{T}$ et SLC $\mathscr{T}$. En effet, un objet $C$ est connexe si et seulement si pour tout ensemble $I$, l'application $I \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, I_{\mathscr{T}})$ est bijective. Comme il s'agit d'une sous-catégorie pleine, ayant mêmes objet final, limites projectives finies et sommes directes, les notions de connexité coïncident.

Pour les mêmes raisons, un objet de SLC $\mathscr{T}$ est un pseudo-torseur sous son groupe d'automorphismes si et seulement s'il l'est dans $\mathscr{T}$.

Le caractère localement constant constitue le point difficile. Un objet localement constant de SLC $\mathscr{T}$ l'est encore dans $\mathscr{T}$, car les familles épimorphiques sont les mêmes. Réciproquement, un objet localement constant de $\mathscr{T}$ est trivialisé par des objets connexes non vides qui recouvrent l'objet fanal, mais on ne sait pas, *a priori*, qu'on peut les supposer localement constants. Néanmoins, nous avons vu que tout objet localement constant $L$ était recouvert par les objets galoisiens qui le trivialisaient. Nous allons voir que l'image dans l'objet final d'un objet galoisien en est une composante connexe ; en rajoutant à la famille d'objets galoisiens les composantes connexes de l'objet final qui ne sont pas recouvertes, on obtient une famille couvrante, qui trivialise $L$ (car le produit fibré de $L$ avec l'une de ces composantes connexes est vide). 2.25 □

**2.26** *L'image $U$ d'un objet localement constant $Y$ dans l'objet final $e$ en est un sommand direct.*

Recouvrons $e$ par des objets $(U_i)_{i \in I}$ qui trivialisent $L$ et notons

$$\begin{aligned}
I_0 &= \{\, i \in I \ :\ U_i \times Y = \varnothing \,\} \\
I_1 &= \{\, j \in I \ :\ U_j \times Y \neq \varnothing \,\} = I \setminus I_0 \\
V_0 &= \text{l'image de } \coprod_{i \in I_0} U_i \text{ dans } e \\
V_1 &= \text{l'image de } \coprod_{j \in I_1} U_j \text{ dans } e.
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in I_0$ et $j \in I_1$, on a $U_i \times U_j = \varnothing$. En effet, il existe un ensemble non vide $F$ tel que

$$U_j \times Y = F \times U_J, \qquad U_i \times Y = \varnothing$$

et donc

$$U_i \times U_i \times Y = F \times (U_i \times U_j) = \varnothing\,;$$

comme $F$ est non vide, c'est $U_i \times U_j$ qui l'est. On en déduit que $e = V_0 \coprod V_1$. Il suffit dès lors de remarquer que $V_1 \simeq U$ pour pouvoir conclure (détails?).

2.26 □

Nous venons de démontrer que le topos SLC $\mathscr{T}$ est localement galoisien.

2.24 □

[L, 3.4.1] **2.27** *Le morphisme de topos $\mathscr{T} \longrightarrow$ SLC $\mathscr{T}$ est 2-universel parmi les morphismes vers des topos localement galoisiens.*

Rappelons ce que signifie 2-universel : pour tout topos localement galoisien $\mathscr{T}'$, le foncteur

$$\mathfrak{Hom}(\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}, \mathscr{T}') \longrightarrow \mathfrak{Hom}(\mathscr{T}, \mathscr{T}')$$

obtenu en composant avec le morphisme $\mathscr{T} \longrightarrow$ SLC $\mathscr{T}$ est une équivalence de catégories.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \arrow[d, dotted] \\ \mathscr{T} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathscr{T}' \end{tikzcd}$$

[L, 2.4.12] **2.28** *Un morphisme de topos $\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ induit un morphisme SLC $\mathscr{T} \longrightarrow$ SLC $\mathscr{T}'$.*

Il suffit de noter que l'image réciproque d'un objet localement constant l'est encore : cela résulte du fait que le foncteur « image réciproque » préserve objet final, produits fibrés, sommes disjointes et familles épimorphiques.

2.28 □

Si maintenant $\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ est un morphisme vers un topos localement galoisien, il induit un morphisme SLC $\mathscr{T} \longrightarrow$ SLC $\mathscr{T}' = \mathscr{T}'$ qui permet de conclure. 2.27 □

Ceci achève (enfin) la démonstration du théorème. 2.28 □

# 3 Topos localement galoisien

La notion de pseudo-foncteur généralise celle de préfaisceau, en remplaçant la catégorie des ensembles par la 2-catégorie des catégories. Un **pseudo-foncteur** sur une catégorie $\mathfrak{C}$ est un 2-foncteur non strict $\mathcal{F} : \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Cat}$. Plus précisément, il associe, à tout objet ou morphisme de $\mathfrak{C}$, une catégorie ou un foncteur (que l'on qualifie parfois de **foncteur de changement de**

**base**), il respecte les identités mais ne respecte la composition qu'à transformation naturelle près : à un triangle commutatif on associe un triangle commutatif à isomorphisme près,

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{F}y \arrow[dl, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow c_{f,g}"] & \\ \mathcal{F}x & {} & \mathcal{F}z \arrow[ul, "\mathcal{F}(g)"'] \arrow[ll, "\mathcal{F}(g\circ f)"] \end{tikzcd}$$

On demande que ces 2-isomorphismes soient compatibles entre eux,

$$c_{f,\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}, \qquad c_{\mathrm{Id},g} = \mathrm{Id}, \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(h) \arrow[r, "c_{f,g}\mathcal{F}(h)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)c_{g,h}"'] & \mathcal{F}(g\circ f)\mathcal{F}(h) \arrow[d, "c_{g\circ f,h}"] \\ \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(h\circ g) \arrow[r, "c_{f,h\circ g}"'] & \mathcal{F}(h\circ g\circ f). \end{tikzcd}$$

Il existe une manière plus obscure mais plus pratique de décrire un pseudo-foncteur : c'est la notion de catégorie fibrée. À un pseudo-foncteur $\mathcal{F}$ sur une catégorie $\mathfrak{C}$, on peut associer une catégorie $\mathfrak{F}$ et un foncteur $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ de la manière suivante. les objets de $\mathfrak{F}$ sont ceux des $\mathcal{F}(i)$,

$$\mathrm{Ob}\,\mathfrak{F} = \coprod_{x\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(x).$$

un morphisme entre un objet $X$ au dessus de $x$ et un objet $Y$ au dessus de $y$ est la donnée $(f,\varphi)$ d'un morphisme $f : x \longrightarrow y$ et d'un morphisme $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{F}(f)(Y)$ au dessus de $\mathrm{Id}_x$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & \\ \mathcal{F}(f)(Y) & Y \\ \mathcal{F}(x) & \mathcal{F}(y) \arrow[l, "\mathcal{F}(f)"'] \\ x \arrow[r, "f"'] & x \end{tikzcd}$$

On définit ensuite aisément la composition des morphismes et le foncteur $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$. Les catégories que l'on obtient ainsi sont exactement les catégories fibrées, que nous allons définir maintenant.

Soit $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ un foncteur. On dit qu'un morphisme $X \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{F}$ au dessus de $f : x \longrightarrow y$ est **cartésien** si et seulement si pour tout morphisme $X' \longrightarrow Y$ au dessus de $f$, il existe un unique morphisme $X' \longrightarrow X$ au dessus de $\mathrm{Id}_x$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & \\
X \arrow[r] & Y \\
& \\
x \arrow[r, "f"] & y.
\end{tikzcd}$$

Dans l'exemple précédent, les morphismes de la forme $(f, \mathrm{Id}_X)$ sont cartésiens, mais ce ne sont pas les seuls : on peut aussi les composer avec un automorphisme de $X$.

On dit que $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ est une **catégorie fibrée** si pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ de $\mathfrak{C}$ et tout objet $Y$ au dessus de $y$, il existe un objet $X$ au dessus de $x$ et un morphisme cartésien $X \longrightarrow Y$ au dessus de $f$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted] & Y \\
& \\
x \arrow[r, "f"'] & y,
\end{tikzcd}$$

et si le composé de deux morphismes cartésiens est encore cartésien.[7] La **fibre** $\mathfrak{F}_x$ au dessus d'un objet $x$ de $\mathfrak{C}$ est la catégorie des objets au dessus de $x$ et des morphismes au dessus de $\mathrm{Id}_x$. Un morphisme de catégories fibrées sur $\mathfrak{C}$ est un foncteur transformant les morphismes cartésiens en morphismes cartésiens et faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{G} \arrow[dl] \\
& \mathfrak{C}. &
\end{tikzcd}$$

On parlera aussi de **foncteur cartésien**. Un 2-morphisme de catégories fibrées est une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{H}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{H}'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathfrak{G} \arrow[dl, "\mathcal{G}"] \\
& \mathfrak{C} &
\end{tikzcd}$$

7. Sans cette deuxième condition, on obtient des **catégories préfibrées**, qui correspondent à des pseudo-foncteurs dans lesquels les $c_{f,g}$ ne sont pas nécessairement des isomorphismes.

telle que pour tout objet $X$ de $\mathfrak{F}$, on ait $\mathcal{G}\alpha_X = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}X}$ .

Si $I$ est une petite catégorie, on peut voir un foncteur $I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ comme un système projectif ou inductif. De même, si $\mathcal{F} : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{Cat}}$ est un pseudo-foncteur, ou si $\mathfrak{F} \longrightarrow I$ est une catégorie fibrée, on peut le voir comme un 2-système projectif ou inductif. Nous allons maintenant préciser ces notions.

Nous allons définir successivement la notion de limite projective dans la catégorie des ensembles, dans la 2-catégorie des catégories, puis dans la 2-catégorie des topos.

Soit $I$ une petite catégorie et $I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ un système projectif. Considérons la catégorie fibrée associée[8] $\mathfrak{F} \longrightarrow I$. La limite projective de $\mathfrak{F}$, notée $\varprojlim \mathcal{F}$ ou $\varprojlim \mathfrak{F}$ par abus de notation est un ensemble (*a priori*, on ne sait pas qu'il en existe un) représentant le foncteur[9]

$$\begin{cases} \mathfrak{Ens} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_I(I \times X, \mathfrak{F}). \end{cases}$$

On définit similairement la notion de limite inductive, en considérant le foncteur

$$\begin{cases} \mathfrak{Ens} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_I(\mathfrak{F}, I \times X). \end{cases}$$

Considérons maintenant un 2-système projectif de catégories, *i.e.*, un pseudo-foncteur $\mathcal{F} : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{Cat}}$ et la catégorie fibrée associée $\mathfrak{F} \longrightarrow I$. La 2-limite projective est une catégorie représentant le foncteur

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathfrak{Cat}} & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathfrak{Cat}} \\ \mathfrak{C} & \longmapsto & \mathfrak{Hom}_I(I \times \mathfrak{C}, \mathfrak{F}). \end{cases}$$

On définit similairement la 2-limite inductive.

On peut voir un 2-système projectif de topos[10] $I \longrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{Topos}}$ comme un pseudo-foncteur $I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{Cat}}$, auquel on associe une catégorie fibrée $\mathfrak{F}$

8. On peut remarquer que la limite projective est l'ensemble des sections (cartésiennes) de $\mathfrak{F}$. Cette remarque se généralise pour une 2-limite projective de catégories, mais nous ne l'utiliserons pas.

9. Si on note $L$ la limite, on a des bijections $\mathrm{Hom}(X, L) \simeq \mathrm{Hom}(I \times X, \mathfrak{F})$, en particulier, pour $X = L$, il vient $\mathrm{Hom}(L, L) \simeq \mathrm{Hom}(I \times L, \mathfrak{F})$. À l'endomorphisme $\mathrm{Id}_L \in \mathrm{Hom}(L, L)$ correspond donc un morphisme

$$\begin{tikzcd} I \times L \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{F} \arrow[dl] \\ & I, & \end{tikzcd}$$

*i.e.*, des morphismes $L \longrightarrow \mathfrak{F}_i$. On retrouve donc la définition usuelle de la limite projective.

10. On remarquera que le pseudo-foncteur part de $I$ et pas de $I^{\mathrm{op}}$.

sur $I$. C'est une **catégorie fibrée en topos** : les fibres sont des topos et les foncteurs de changement de base induisent des morphismes de topos. Un morphisme de catégories fibrées en topos $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ est un morphisme de catégories fibrées $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{F}$ qui induit des morphismes de topos entre les fibres. Les 2-morphismes de catégories fibrées en topos sont les 2-morphismes de catégories fibrées, mais dans l'autre sens. Une 2-limite projective de $\mathfrak{F}$ est un topos représentant le 2-foncteur

$$\begin{cases} \mathfrak{Topos} & \longrightarrow & \mathfrak{Topos} \\ \mathscr{T} & \longmapsto & \mathfrak{Hom}_I(I \times \mathscr{T}, \mathfrak{F}). \end{cases}$$

On dira qu'un 2-système de topos est **strict** si les foncteurs changement de base $\mathfrak{F}_i \longrightarrow \mathfrak{F}_j$ sont pleinement fidèles.

***Les topos localement galoisiens sont exactement les 2-limites projectives filtrantes strictes de topos classifiants de groupoïdes.***

Soit $\mathscr{T}$ un topos localement galoisien. Si $X$ est un objet localement constant de $\mathscr{T}$, les objets connexes non vides qui le trivialisent recouvrent l'objet finale et engendrent un crible couvrant $R$. Notons $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ la sous-catégorie pleine des objets trivialisés par tous les objets connexes de $R$. Nous allons montrer qu'il s'agit d'un topos classifiant de groupoïde et que $\mathscr{T}$ est une 2-limite projective filtrante stricte de topos de cette forme.

**3.1** *La sous-catégorie pleine* $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ *est le topos classifiant d'un groupoïde.*

Notons $\mathfrak{S}$ le site des objets connexes non vides de $R$. Comme $R$ contient une famille épimorphique, ce site est générateur. On peut voir $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ comme la catégorie des faisceaux sur le groupoïde $\pi\mathfrak{S}$ associé à la catégorie $\mathfrak{S}$. C'est bien un topos, car il est engendré par les objets galoisiens de $R$ qui forment une famille essentiellement petite. 3.1 □

**3.2** *Le foncteur d'inclusion* $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) \longrightarrow \mathscr{T}$ *induit un morphisme de topos* $\mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$.

En effet, il suffit de remarquer que la sous-catégorie pleine $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ est stable par limites inductives et projectives (dans le lemme 2.5 et 2.17, nous n'avions besoin de la finitude des systèmes projectif ou inductif que pour savoir que le site des objets connexes trivialisant tous les objets du système était bien un site générateur). 3.2 □

Pour pouvoir conclure que $\mathscr{T}$ est bien la 2-limite projective des $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$, nous allons construire la catégorie fibrée en topos correspondante et vérifier que la limite est bien celle attendue, grace au lemme suivant qui est une caractérisation de la 2-limite projective d'un système (et pas d'un 2-système) projectif filtrant strict de topos classifiants de groupoïdes.

**3.3** *Soit $\mathscr{T}$ un topos, $I$ un ensemble ordonné filtrant et $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille croissante de sous-catégories pleines de $\mathscr{T}$, constituées d'objets localement constants. On suppose que les $\mathscr{T}_i$ sont des topos, que les foncteurs d'inclusion $\mathscr{T}_i \longrightarrow \mathscr{T}_j$ induisent des morphismes de topos $\mathscr{T}_j \longrightarrow \mathscr{T}_i$ et que la réunion $\mathfrak{G}$ des $\mathscr{T}_i$ engendre $\mathscr{T}$. Alors, la sous-catégorie pleine de $I \times \mathscr{T}$ définie par*

$$\mathfrak{F} = \{\, (i, X) \in I \times \mathrm{Ob}\,\mathscr{T} \;:\; X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{T}_i \,\}$$

*est une catégorie fibrée en topos au dessus de $I$, l'inclusion $\mathfrak{F} \hookrightarrow I \times \mathscr{T}$ induit un morphisme de catégories fibrées en topos $I \times \mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{F}$ qui fait de $\mathscr{T}$ la 2-limite projective des $\mathscr{T}_i$.*

On constate que $\mathfrak{F}$ est bien une catégorie fibrée en topos et qu'on a bien un morphisme de catégories fibrées en topos $I \times \mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{F}$. La seule chose à vérifier est que $\mathscr{T}$ est bien la 2-limite projective, *i.e.*, que pour tout topos $\mathscr{S}$, le foncteur suivant est une équivalence de catégories.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{Hom}_{\mathfrak{Topos}}(\mathscr{S}, \mathscr{T}) & \longrightarrow & \mathfrak{Hom}_I(I \times \mathscr{S}, \mathfrak{F}) \\ f : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T} & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} \varphi(f) : & I \times \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathfrak{F} \\ \varphi(f)^{-1} : & \mathfrak{F} & \longrightarrow & I \times \mathscr{S} \\ & (i, X) & \longmapsto & (i, f^{-1}X) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, ce foncteur est pleinement fidèle. Pour le voir, donnons-nous deux objets de $\mathfrak{Hom}(\mathscr{S}, \mathscr{T})$, *i.e.*, deux morphismes de topos $f, g : \mathscr{S} \rightrightarrows \mathscr{T}$ et un morphisme entre leurs images par $\varphi$,

$$\begin{tikzcd} I \times \mathscr{S} \arrow[r, bend left, "\varphi(f)"] \arrow[r, bend right, "\varphi(g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathfrak{F}, \end{tikzcd}$$

*i.e.*, une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} I \times \mathscr{S} \arrow[r, phantom, "\lambda\Uparrow"] & \mathfrak{F} \subset I \times \mathscr{T}. \arrow[l, bend right, "\varphi(f)^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "\varphi(g)^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Nous voulons montrer qu'elle est bien dans l'image de $\varphi$. Explicitons cette transformation naturelle : soit $X$ un objet de $\mathscr{T}_i \subset \mathscr{T}_j$.

$$\begin{tikzcd}
(i,X) \arrow[d] & \varphi(f)^{-1}(i,X) = (i,f^{-1}X) \arrow[d] & (i,g^{-1}X) = \varphi(g)^{-1}(i,X) \arrow[l] \arrow[d] \\
(j,X) & \varphi(f)^{-1}(j,X) = (j,f^{-1}X) & (j,g^{-1}X) = \varphi(g)^{-1}(j,X) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Il existe un unique morphisme de foncteurs

$$u : g^{-1}|_{\mathfrak{G}} \longrightarrow f^{-1}|_{\mathfrak{G}}$$

tel que $\lambda_{i,X} = (\mathrm{Id}_X, u_X)$. Mais comme $\mathfrak{G}$ engendre $\mathscr{T}$, le foncteur

$$\mathfrak{Hom}(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \longrightarrow \mathfrak{Hom}(\mathfrak{G}, \mathscr{S})^{\mathrm{op}}$$

est pleinement fidèle. Notre foncteur $\varphi$ est donc bien pleinement fidèle.

Montrons maintenant que le foncteur $\varphi$ est essentiellement surjectif. Un morphisme de catégories fibrées en topos $I \times \mathscr{S} \longrightarrow \mathfrak{F}$ est défini par un foncteur cartésien

$$\begin{cases} \mathfrak{F} & \longrightarrow & I \times \mathscr{S} \\ (i,X) & \longmapsto & (i, a(i,X)). \end{cases}$$

Montrons tout d'abord, qu'à isomorphisme près, le foncteur $a$ provient d'un foncteur $b : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathscr{S}$ avec $a(i,X) \simeq b(X)$. Pour le voir, il suffit de remarquer que les changements de base de $\mathfrak{F}$ sont des inclusions et que, pour $X$ fixé et $i$ variable, les $a(i,X)$ sont isomorphes. On pose donc $b(X) = \varprojlim a(i,X)$. Ceci définit le foncteur $b$ sur les objets, il faut encore le définir sur les morphismes. Remarquons que les projections $b(X) \longrightarrow (i,X)$ sont des isomorphismes. L'image d'un morphisme $X \longrightarrow Y$ par $b$ est alors donnée par

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & b(X) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, dotted] & a(i,X) \arrow[d] \\
Y & b(Y) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & a(i,Y).
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $b : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathscr{S}$ induit un morphisme de sites $\mathscr{S} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{G}}$, où $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathscr{T}$, il suffit de voir que $b$ est exact à gauche (car il en va de même pour les restrictions de $a$ aux fibres de $\mathfrak{F}$) et que $b$ transforme les familles épimorphiques de $\mathfrak{G}$ en familles épimorphiques de $\mathscr{S}$.

La démonstration de ce point me semble particulièrement confuse, je ne la rédige donc pas pour l'instant.

Ceci achève la démonstration de la caractérisation d'une 2-limite filtrante stricte de topos classifiants de groupoïdes. 3.3 □

Il reste peut-être à voir que l'on a bien un système *filtrant.*

Réciproquement, il nous faut maintenant montrer que les 2-limites projectives filtrantes strictes de topos classifiants de groupoïdes sont des topos localement galoisiens.

Soit $\mathfrak{F} \longrightarrow I$ la catégorie fibrée en topos associée à un 2-système projectif filtrant strict de topos classifiants de groupoïdes. On commence par démontrer que l'on peut se ramener à un *système* projectif (et non plus un 2-système). Ensuite, en oubliant que les fibres sont des topos, on se retrouve avec un système *inductif* filtrant strict de catégories, dont on prend la limite. Ce n'est pas un topos, mais son topos de faisceaux pour la topologie canonique est localement galoisien et grace au lemme précédent, c'est bien la 2-limite recherchée.

**3.4** *Si on se donne un* 2*-système inductif filtrant strict de catégories, on peut se ramener à un système (et plus un* 2*-système) inductif filtrant strict.*
*Plus précisément, si le* 2*-système est décrit par une catégorie fibrée* $\mathfrak{F} \longrightarrow I$ *au dessus d'un ensemble ordonné filtrant* $I$*, il existe une catégorie* $\mathfrak{K}$ *et des sous-catégories pleines* $(\mathfrak{K}_i)_{i\in I}$ *telles que* $\mathfrak{K}$ *soit la réunion des* $\mathfrak{K}_i$ *et telles que* $\mathfrak{F}$ *s'identifie à la sous-catégorie pleine de* $I \times \mathfrak{K}$

$$\{ (i, X) \in I \times \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K} \ :\ X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_i \}.$$

Nous nous contentons de donner l'idée de la démonstration en laissant les détails (vérifications triviales et fastidieuses) au lecteur. On construit $\mathfrak{K}$ avec les mêmes objets que $\mathfrak{F}$ et en inversant les morphismes cartésiens de $\mathfrak{F}$. On peut vérifier que les foncteurs canoniques $\mathfrak{F}_i \longrightarrow \mathfrak{K}$ sont pleinement fidèles et que la réunion de leurs images essentielles $\mathfrak{K}_i$ égale $\mathfrak{K}$. Le foncteur $\mathfrak{F} \longrightarrow I \times \mathfrak{K}$ est pleinement fidèle et son image essentielle est bien celle attendue. 3.4 □

Revenons à la situation qui nous intéresse : une catégorie $\mathfrak{C}$ est réunion de sous-catégories pleines $\mathfrak{C}_i$ qui sont des topos classifiants de groupoïdes et les inclusions $\mathfrak{C}_i \hookrightarrow \mathfrak{C}_j$ induisent des morphismes de topos. La catégorie des faisceaux $\widetilde{\mathfrak{C}}$ sur $\mathfrak{C}$ munie de la topologie canonique est un topos (la seule chose à vérifier est la petitesse : elle résulte de la petitesse de $I$). Les foncteurs d'inclusion $\mathfrak{C}_i \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{C}}$ induisent des morphismes de topos : en effet, ils commuttent aux limites projectives finies et transforment familles épimorphiques en familles épimorphiques. Le lemme 3.3 nous dit alors que $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est la 2-limite projective des $\mathfrak{C}_i$. Comme les objets galoisiens de $C_i$ sont encore galoisiens dans $\widetilde{\mathfrak{C}}$ et engendrent $\widetilde{\mathfrak{C}}$, on en déduit que $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est un topos localement galoisien. 2.28 □

# 4 Exemples

Nous donnons maintenant quelques exemples de la théorie qui vient d'être exposée : pour des topos de faisceaux sur des espaces topologiques et pour des topos de préfaisceaux.

**4.1** *Un espace topologique est localement connexe si et seulement si son topos de faisceaux est localement connexe.*

En effet, si $X$ est un espace topologique localement connexe, sa topologie, et aussi son topos de faisceaux, est engendrée par les ouverts connexes. En regardant les faisceaux sur $X$ comme des espaces étalés, on voit qu'un ouvert connexe est encore connexe en tant que faisceau.

Réciproquement, si le topos $\mathfrak{Sh}\, X$ est localement connexe, tout objet de $\mathfrak{Sh}\, X$ peut s'écrire comme somme disjointe de ses composantes connexes ; en particulier, tout ouvert de $X$ peut s'écrire comme somme disjointe de composantes connexe. En regardant ces composantes connexes comme des espaces étalés, on voit que ce sont en fait des ouverts de $X$ (qui sont encore connexes). L'espace topologique $X$ vérifie donc la propriété suivante : tout ouvert est somme disjointe de ses composantes connexes ; or cela caractérise les espaces topologiques localement connexes. 4.1 □

**4.2** *Le progroupoïde fondamental du topos des faisceaux sur un espace topologique localement conexe par arcs et localement simplement connexe par arcs est constant et coïncide avec le groupoïde fondamental usuel.*

Soit $X$ un espace topologique localement connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. Le groupoïde fondamental de $X$ a pour objets les points de $X$ et pour morphismes les classes d'homotopie de chemins dans $X$. Un **revêtement** de $X$ est une application continue $\pi : E \longrightarrow X$ telle que tout $x \in X$ possède un voisinage $V$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} V \times F \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(V) \arrow[dl] \\ & V, & \end{tikzcd}$$

où $F$ est un ensemble. Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements de $X$ et la catégories des ensembles munis d'une action du groupoïde fondamental. Cette propriété caractérise le groupoïde fondamental. Si l'espace est connexe, le choix d'un point de $X$ nous donne le même résultat pour le groupe fondamental.

Remarquons tout d'abord que les faisceaux localement constants sur $X$ sont les revêtements. Comme la topologie de $X$, et aussi le topos $\mathfrak{Sh}\, X$, est engendrée par les ouverts simplement connexes et comme ces ouverts trivialisent les objets localement constants (on peut d'ailleurs prendre cela comme définition d'un espace localement simplement connexe), on a

$$\mathrm{SLC}\,\mathfrak{Sh}\, X = \underset{\longleftarrow}{2\text{-lim}}_R\, \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) = \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R_0),$$

où $R_0$ désigne le crible (qui couvre l'objet final) engendré par les ouverts simplement connexes.[11] Cette catégorie est donc équivalente à la catégorie des revêtements de $X$, qui est équivalente au topos classifiant du groupoïde fondamental usuel. 4.2 □

**4.3** *Le groupoïde fondamental de la catégorie $\widehat{\mathfrak{C}}$ des préfaisceaux sur une petite catégorie $\mathfrak{C}$ est le groupoïde $\pi\mathfrak{C}$ associé à $\mathfrak{C}$.*

Commençons par vérifier que le topos des préfaisceaux est localement connexe ; plus précisément, montrons qu'un objet $X$ de $\mathfrak{C}$ est connexe dans $\widehat{\mathfrak{C}}$. Supposons que $X = \mathrm{Hom}(\cdot, X) = F_1 \coprod F_2$. En particulier, en évaluant en $X$, il vient $X = \mathrm{Hom}(X, X) = F_1(X) \coprod F_2(X)$ et $\mathrm{Id}_X$ appartient à l'un des deux préfaisceaux, par exemple $F_1$. Montrons que $X = F_1$, *i.e.*, pour tout $Y$, montrons $\mathrm{Hom}(Y, X) = F_1(X)$. Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}(Y,X) & F_1(Y) \ni f \arrow[l, hook'] \\ X & \mathrm{Hom}(X,X) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(f,X)"] & F_1(X) \ni \mathrm{Id}_X \arrow[l, hook'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

la fonctorialité de $F_1$ nous dit que $f \in F_1(Y)$. Finalement, $X = F_1$ et $F_2 = \varnothing$.

Soit $L$ un objet localement constant de $\widehat{\mathfrak{C}}$, montrons qu'il est trivialisé par tous les objets de $\mathfrak{C}$. Il existe une famille d'objets connexes $(F_i)_{i\in I}$ couvrant l'objet final et trivialisant $L$.

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr] & & e \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Pour tout objet $X$ de $\mathfrak{C}$, on a un morphisme $f \in e(X)$ vers l'objet final $e$ de $\widehat{\mathfrak{C}}$. Mais comme les $F_i$ recouvrent $e$, on a $e(X) = \bigcup_{i\in I} F_i(X)$. En particulier, $f$ appartient à l'un de $F_i$, *i.e.*, le morphisme $f$ se factorise par l'un de $F_i$,

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr] & & e \\ & X. \arrow[ul] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

11. On remarquera que dans un tel topos une somme disjointe d'objets localement connexes est encore localement connexe.

D'après le lemme 2.3, la connexité de $X$ et le morphisme $X \longrightarrow F_i$ nous disent que $X$ trivialise $L$. 4.3 $\square$

**4.4** *Le choix d'un point sur un topos $\mathscr{T}$ localement connexe permet de définir un pro-*groupe *fondamental.*

Le choix d'un point de $\mathscr{T}$ définit un point sur les topos classifiants de groupoïdes $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$. Attardons-nous un instant sur les points de tels topos.

**4.5** *Tout foncteur fibre sur le topos classifiant d'un groupoïde est représentable. En particulier, les foncteurs-fibres (ou les points) d'un tel topos forment un groupoïde, équivalent à celui dont on était parti.*

Il est clair qu'un préfaisceau représentable est un foncteur fibre. Soit $\varphi : \widehat{\mathfrak{G}} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ un foncteur fibre. Comme $\varphi$ est exact, il préserve l'objet final : il existe donc un objet (par exemple, l'objet final) dont l'image est non vide. Comme tout préfaisceau est limite inductive de préfaisceaux représentables et comme $\varphi$ préserve ces limites, il existe un objet $X$ de $\mathfrak{G}$ sur lequel $\varphi$ est non vide. Nous allons maintenant voir que $X$ représente $\varphi$, *i.e.*, $\varphi \simeq \mathrm{Hom}(X, \cdot)$. Soit donc $T$ un objet de $\widehat{\mathfrak{G}}$. Il est trivialisé par les objets de $\mathfrak{G}$, en particulier par $X$,

$$\mathrm{Hom}(X, T)_X \simeq X \times T.$$

En appliquant le foncteur $\varphi$, on obtient la bijection

$$\begin{cases} \varphi(X) \times \mathrm{Hom}(X, T) & \longrightarrow \quad \varphi(X) \times \varphi(T) \\ \qquad (x, f) & \longmapsto \quad (x, \varphi(f)(x)) \end{cases}$$

qui induit une bijection $\mathrm{Hom}(X, T) \longrightarrow \varphi(T)$. 4.5 $\square$

Le choix d'un point de $\mathscr{T}$,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Ens} \arrow[r] & \mathscr{T} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R') \arrow[r] & \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) \end{tikzcd}$$

nous donne en particulier un point $p_R$ de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$, pour tout crible $R$ couvrant l'objet final. Comme les points de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ forment un groupoïde $G_R$ et comme la correspondance

$$\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) \longmapsto G_R = \mathfrak{Points}\ \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$$

est fonctorielle, on obtient un système projectif filtrant strict de groupoïdes pointés $(G_R, p_R)$, *i.e.*, un pro-groupe strict. 4.4 $\square$

# 5 Remarques

On peut trouver les résultats présentés ici dans [L] ou [$M_1$]. Cette notion de groupoïde fondamental coïncide avec celle de *groupe fondamental élargi* de [SGA3, X 6], avec celle obtenue à partir du type d'homotopie du topos [AM, 10.7], ou avec celle que l'on définit, pour les topos localement simplement connexes par arcs, à l'aide de chemins [BM].

On peut reprendre tout ce qui a été fait ici avec la sous-catégorie pleine SLCF $\mathscr{T}$ des sommes disjointes d'objets localement constants finis. C'est un topos localement galoisien profini, *i.e.*, engendré par ses objets galoisiens finis. Le foncteur d'inclusion SLCF $\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ induit un morphisme de topos $\mathscr{T} \longrightarrow$ SLCF $\mathscr{T}$ qui est 2-universel parmi les morphismes vers des topos localement galoisiens profinis. Les topos localement galoisiens profinis sont exactement les 2-limites projectives filtrantes strictes de topos classifiants de groupoïdes finis. On peut vérifier (je ne l'ai pas fait) que dans ce cadre, on n'a pas besoin de la locale connexité : il suffit de prendre un topos connexe, ou une somme disjointe de topos connexes.

Signalons une autre généralisation de la théorie du groupe fondamental [JT]. On ne peut pas prendre la limite, dans la catégorie des groupoïdes topologiques, du système projectif constituant le groupoïde fondamental (la limite peut être nulle sans que le système projectif soit trivial). Par contre, on peut prendre cette limite dans la catégorie des groupoïdes dans la catégorie des espaces généralisés (la catégorie opposée à la catégorie des locales). Dans ce cadre, le groupoïde fondamental que nous avons obtenu dans cet exposé est un groupoïde prodiscret et les topos localement galoisiens sont exactement les topos classifiants des groupoïdes prodiscrets. Ce résultat se généralise : les topos sont exactement les catégories de faisceaux équivariants sur les groupoïdes de la catégorie des espaces généralisés.

# Références


[AM] A. Artin and B. Mazur, *Étale homolopy*, LNM 100, Springer–Verlag, 1969.

[BM] M. Bunge and I. Moerdijk, *On the construction of the Grothendieck fundamental group of a topos by paths*, J. Pure and Appl. Alg. **116** (1997), 99–113.

[DD] R. Douady and A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Cédic–Nathan, 1979.

[JT] A. Joyal and M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, Mem. AMS **309** (1984).

[L] O. Leroy, *Groupoïde fondamental en théorie des topos et théorème de Van Kampen*, Publications mathématiques de l'université de Montpelier **19** (1979).

[M1] I. Moerdijk, *Prodiscrete groups and galois toposes*, Proc. Kon. Ned. Aka. Wet. (Indag. Math.) **92** (1989), 219–234.

[M2] I. Moerdijk, *Classifying spaces and classifying topoi*, LNM 1616, Springer–Verlag, 1995.

[MM] S. MacLane and I. Moerdijk, *Topos theory*, Handbook of algebra (M. Hazewinkel, ed.), vol. 1, North-Holland, 1996, pp. 501–528.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, LNM 224, Springer–Verlag, 1971.

[SGA3] M. Demazure and A. Grothendieck, *Schémas en groupes, tome 2*, LNM 152, Springer–Verlag, 1970.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, LNM 270, Springer–Verlag, 1972.