Opérades et surfaces de Riemann

Vincent ZOONEKYND

zoonek@math.jussieu.fr

24 Mars 1998

Résumé

Les opérades construites à partir des espaces de modules de surfaces de Riemann pointées permettent de décrire de manière unifiée les algèbres rencontrées en physique des particules.

Vous pensez bien que je ne vais pas définir une chose aussi concrète, aussi constemment présente à l'esprit de chacun d'entre-nous. H. Bergson, *L'énergie spirituelle*

Ceux d'entre vous qui ont déjà essayé de lire des articles « sérieux » de physiciens y ont rencontré une faune étrange : il y a des algèbres partout avec des noms très compliqués. Comment le pauvre mathématicien peut-il espérer s'y retrouver ? Il est en fait possible de décrire toutes ces algèbres (et d'autres, tellement compliquées que les physiciens ne les ont pas encore découvertes) de manière unifiée, à l'aide d'*opérades.* Mais, me direz-vous, la difficulté demeure : nous avons simplement remplacé des algébres compliquées par des opérades compliquées. C'est vrai, mais ces opérades proviennent d'objets géométriques assez simples et les liens confus entre les différents types d'algèbres deviennent limpides sur le plan géométrique : toutes les opérades algébriques que l'on rencontre découlent d'une unique opérade géométrique, à laquelle on applique des foncteurs tels que l'homologie.

1 Des algèbres aux opérades

Nous n'allons pas définir tout de suite la notion d'opérade (c'est trop compliqué, trop formel) mais expliquer comment on y parvient, décrire la naissance de cette structure algébrique, pas à pas, en procédant par essais et erreurs. Notre but est ici le suivant : nous cherchons à décrire de manière unifiée les différents types d'algèbres que nous connaissons.

Je pense que le lecteur a déjà rencontré différents types d'algèbres. Donnons quand-même quelques exemples.

- Il y a des algèbres unitaires, par exemple les algèbres de matrices $\mathscr{M}_n(k)$ sur un corps k.

- Il y a des algèbres commutatives, par exemple les algèbres de polynômes, ou les algèbres de matrices diagonales.

- Il y a les algèbres différentielles, *i.e.*, munies d'un endomorphisme de carré nul, par exemple l'algèbre extérieure $\bigwedge V$ d'un espace vectoriel V ou l'algèbre $\Omega^\bullet(X)$ des formes différentielles sur une variété X.

- Il y a les algèbres de Lie, par exemple les algèbres de matrices $\mathscr{M}_n(k)$ munies, non pas de la multiplication habituelle, mais du commutateur $[X,Y] = XY - YX$. Cette algèbre n'est pas associative (ni même, d'ailleurs, unitaire) ; elle vérifie néanmoins l'identité de Jacobi, qui exprime le défaut d'associativité :
$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,X],Z] = 0.$$

- Les informaticiens ou les logiciens parmi nous connaissent les algèbres de Boole ou de Heyting. On pourrait multiplier les exemples : ceux qui précèdent sont très simples, il y en a d'abominables.

Comment donner une description unifiée de ces algèbres disparates ? On commence par remarquer qu'une algèbre A, c'est essentiellement la donnée d'un produit, *i.e.*, d'une application bilinéaire[1] $A \times A \longrightarrow A$, vérifiant certaines propriétés, comme l'associativité ou la relation de Jacobi. De même, un élément neutre, c'est la donnée d'une application linéaire $k \longrightarrow A$, vérifiant certaines propriétés vis-à-vis du produit. De même, une différentielle, c'est la donnée d'une application linéaire $A \longrightarrow A$, de carré nul. Pour résumer, une algèbre, c'est la donnée de lois 0-aires (par exemple l'unité), de lois 1-aires (par exemple la différentielle), de lois 2-aires (par exemple, le produit), de lois 3-aires (je n'ai pas donné d'exemple), etc. vérifiant certaines propriétés.

1. Ceux qui connaissent la notion de produit tensoriel peuvent voir cela comme une application *linéaire* $A \otimes A \longrightarrow A$. De même, dans toute la suite, ils peuvent remplacer les produits par des produits tensoriels et les applications multilinéaires par des applications linéaires. Quand nous écrirons $\mathrm{Hom}(A^n, A)$, il faudra comprendre « applications multilinéaires $A^n \longrightarrow A$ » ou, de manière équivalente, « applications linéaires $A^{\otimes n} \longrightarrow A$ ».

Si nous notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des lois n-aires d'une algèbre, on peut décrire une algèbre associative est définie par $\mathscr{C}_n \subset \mathrm{Hom}(A^n, A)$.

$$\mathscr{C}_0 = *, \qquad \mathscr{C}_1 = \varnothing, \qquad \mathscr{C}_2 = *, \qquad \mathscr{C}_n = \varnothing$$

et une algèbre de Lie par

$$\mathscr{C}_0 = \varnothing, \qquad \mathscr{C}_1 = \varnothing, \qquad \mathscr{C}_2 = *, \qquad \mathscr{C}_n = \varnothing.$$

Il reste maintenant à exprimer, à l'aide des $\mathscr{C}_n$, les relations entre ces différentes lois : comment faire ?

Pour décrire ces relations, on est amené à composer ces lois entre elles : ainsi, pour exprimer l'associativité, on compose le produit avec lui-même de deux manières différentes,

$$\begin{tikzcd} & A \times A \arrow[dr, "m"] & \\ A \times A \times A \arrow[ur, "1 \times m"] \arrow[dr, "m \times 1"'] & & A \\ & A \times A \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

et on demande que ces deux composés $A^3 \longrightarrow A$ coïncident. Il convient donc de remplacer $\mathscr{C}_n$ par l'ensemble de *toutes* les lois n-aires que l'on peut obtenir à partir des lois que l'on s'est donné. Par exemple, pour l'algèbre associative, on se retrouve avec

$$\mathscr{C}_0 = \{e\}, \qquad \mathscr{C}_1 = \{\mathrm{Id}\}, \qquad \mathscr{C}_2 = \{m\}, \qquad \mathscr{C}_n = \{m\}.$$

Regardons par exemple d'où vient $\mathscr{C}_1$: on peut construire deux lois 1-aires à partir de l'unité et de la multiplication,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x \cdot e, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & e \cdot x. \end{array} \right.$$

Mais d'après la définition de l'unité, il s'agit dans les deux cas du même morphisme $A \longrightarrow A$. En composant la multiplication avec elle-même, on s'apperoit que l'on peut aussi considérer les produits $x \cdot e \cdot e$, $e \cdot x \cdot e$, etc. Mais comme ils coïncident tous, on a bien $\mathscr{C}_1 = \{\mathrm{Id}\}$.

Arrêtons-nous un instant pour nous appercevoir qu'une opérade n'est plus pour nous simplement une suite d'ensembles, mais qu'il y a des applications entre ces ensembles. Par exemple, avec une loi n-aire et une loi m-aire, on peut former plusieurs lois $(m+n-1)$-aire,

$$\circ_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_n \times \mathscr{C}_m & \longrightarrow & \mathscr{C}_{m+n-1} \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & (x_j)_j \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(\cdots), x_{i+m}, \ldots, x_{m+n-1}). \end{array} \right.$$

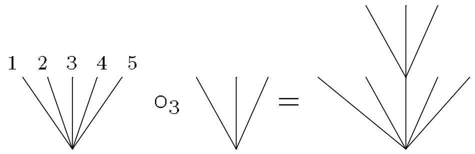

FIG. 1: *L'opérade des arbres*

Graphiquement, on peut représenter les choses comme sur la figure 1. On remarquera que ces applications *codent* les relations entre les lois : ainsi, dire que la multiplication est associative revient à dire que les deux applications $A^3 \longrightarrow A$ construites en composant la multiplication avec elle-même coïncident ; similairement, dire que l'unité est bien une unitité revient à dire que les morphismes $A \longrightarrow A$ obtenus en composant l'unité avec le produit sont en fait le morphisme identité.

C'est presque fini, mais cela ne suffit toujours pas : on aimerait pouvoir construire de nouvelles lois en prenant des combinaisons linéaires des lois que l'on connait déjà. Il suffit pour cela de remplacer les $\mathscr{C}_n$, qui sont des parties de $\mathrm{Hom}(A^n, A)$, par les sous-espaces qu'ils engendrent.

Il reste un dernier détail : pour dire qu'une loi est commutative (ou pour écrire l'identité de Jacobi), on a besoin de changer l'ordre des facteurs, ce que nous ne pouvons pas faire pour l'instant. Remarquons que les $\mathrm{Hom}(A^n, A)$ sont munis d'une action du groupe symétrique. On remplace maintenant les $\mathscr{C}_n$ par leur orbite sous cette action. Ce sont désormais des espaces vectoriels munis d'une action d'un groupe symétrique.

C'est désormais fini : la structure que nous venons de décrire est celle d'une opérade (dans la catégorie des espaces vectoriels). En résumé, c'est la donnée d'une famille $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces vectoriels munis d'une action des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ et de morphismes

$$\circ_i \;:\; \mathscr{C}_m \times \mathscr{C}_n \longrightarrow \mathscr{C}_{m+n-1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

vérifiant certaines propriétés « naturelles » qui sont vraiment très compliquées à écrire et que je passerai sous silence.

Avant de poursuivre, donnons quelques exemples. L'opérade décrivant les algèbres associatives et commutatives est donnée par

$$\mathscr{C}_0 = k, \qquad \mathscr{C}_1 = k, \qquad \mathscr{C}_2 = k, \qquad \mathscr{C}_n = k,$$

où $\mathscr{C}_0$ est engendré par l'unité, $\mathscr{C}_1$ par l'identité et $\mathscr{C}_n$ par le produit. Dans la discussion précédente, nous avions fixé une algèbre A et construit une opérade : on pourra remarquer que l'opérade que l'on obtient ne dépends pas de l'algèbre associative et commutative dont on est parti (pour peu qu'elle soit « suffisemment non triviale »). De même, on peut vérifier que l'opérade décrivant les algèbres associatives est donnée par

$$\mathscr{C}_0 = k, \qquad \mathscr{C}_n = k^{\mathfrak{S}_n}.$$

Toutes ces opérades sont des sous-opérades de l'opérade des endomorphismes, définie par

$$\mathscr{C}_n = \mathrm{Hom}(A^n, A).$$

Il est possible de généraliser la notion d'opérade à des catégories autres que celle des espaces vectoriels : ainsi, les arbres (figure 1) forment une opérade dans la catégorie des ensembles. Nous allons maintenant nous intéresser à des opérades géométriques, *i.e.*, dans la catégorie des espaces topologiques ou des variétés différentielles.

2 Opérades géométriques et physique des particules

Voici un autre exemple d'opérade. Notons D le disque unité du plan complexe et $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des plongements de n copies de D dans D obtenus à partir de translations et d'homothéties. On peut définir diverses compositions comme sur la figure 2 et vérifier qu'il s'agit bien d'une opérade.

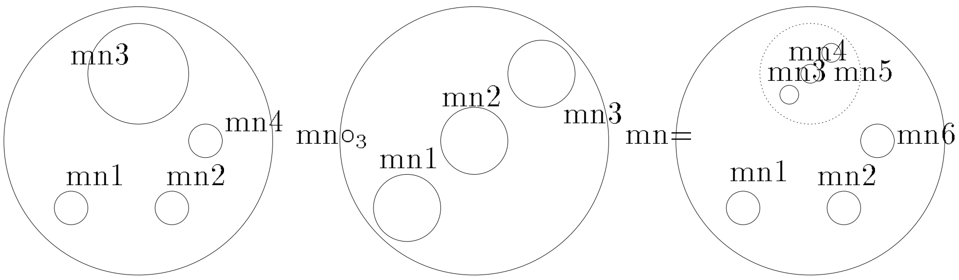

FIG. 2: *L'opérade des petits disques*

Nous allons généraliser cette opérade en remplaçant le disque par une surface de Riemann.

Une surface de Riemann est une variété complexe compacte de dimension un, de genre g. On peut voir cela comme une variété réelle compacte de dimension deux (voir la figure 3) munie d'un moyen de mesurer les angles. Sur

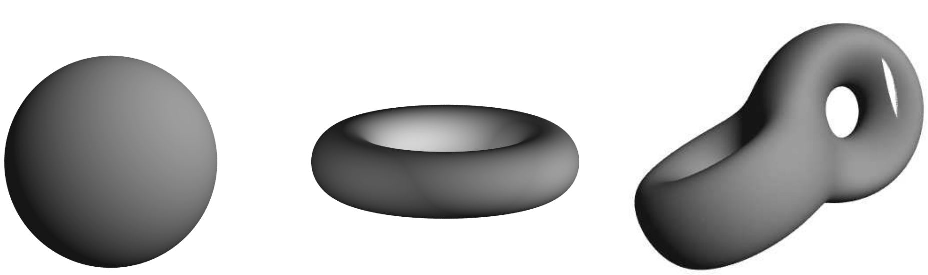

FIG. 3: *Surfaces de genre 0, 1 et 2*

une variété réelle, il peut exister plusieurs structures complexes. L'ensemble de ces structures complexes peut être muni *naturellement* [2] d'une topologie, et même d'une structure de variété complexe : on appelle cela un *espace de modules*. Dans un cours d'analyse complexe, vous avez dû voir que les structures complexes du tore étaient paramétrées par le demi-plan ; l'espace de modules correspondant est un quotient de ce demi-plan.

De même, on peut considèrer l'espace de modules des surfaces pointées : sur une variété réelle compacte de dimension 2, on se donne une structure complexe et n points distincts. L'ensemble des différents choix possibles (choix d'une structure complexe et choix de n points) peut être muni d'une structure de variété : c'est l'espace de modules $\mathscr{M}_{g,n}$, qui nous intéresse.

Arrêtons-nous un instant sur l'espace de modules $\mathscr{M}_{0,n}$ des sphères à n points marqués. On peut voir la sphère comme la droite projective complexe : un morphisme est donc entièrement déterminé par la donné de l'image de trois points. En particulier, $\mathscr{M}_{0,3}$ est réduit à un point, car toutes les sphères munies de trois points sont isomorphes et $\mathscr{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est une sphère privée de trois points, car le seul choix que l'on puisse faire est celui du dernier point, qui doit être différent des trois premiers, que l'on peut supposer en 0, 1 et ∞.

Remarquons maintenant que les $\mathscr{M}_{0,n+1}$ forment presque une opérade, similaire à l'opérade des petits disques. Pour obtenir vraiment une opérade, on peut remplacer les points marqués par des petits disques : si on enlève le disque numéro un, on obtient une sphère privée d'un disque, *i.e.*, un disque, et on se retrouve avec une opérade comparable à celle des petits disques. [3]

On peut construire d'autre opérades à partir de celle-ci, par exemple en rajoutant certaines structures aux surfaces de Riemann ou en compactifiant les espaces de modules obtenus.

2. C'est le sujet de l'exposé que j'avais réalisé l'année dernière

3. On peut aussi remarquer que ces espaces de modules forment une opérade dans la catégorie des espaces topologiques et des applications continues modulo homotopie.

C'est dans cette faune opéradique que se définit la théorie des cordes. Sans détailler l'utilisation des surfaces de Riemann dans ce contexte, rappelons comment elles apparaissent. En physique des particles, il arrive qu'une particule se scinde en deux particles, que elles-mêmes peuvent à nouveau se séparer, ou rester entières et distinctes, on encore se recombiner en une unique particule. En traçant l'évolution d'une telle particule au cours du temps, on obtient un diagramme de Feynmann. Comme en mécanique quantique, on

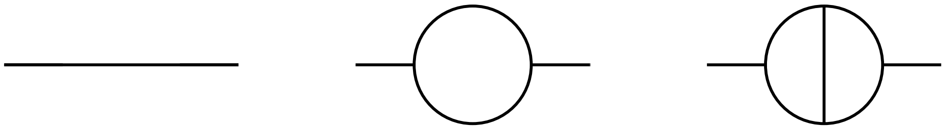

FIG. 4: *Diagrammes de Feynmann*

ne sait pas ce qui se passe entre deux états, le physicien va regarder toutes les possibilités et en faire une « moyenne » : il appelle cela une intégrale de chemins. Il obtient une série formelle, une somme indexée par le genre (le nombre de trous) du graphe.

En théorie des cordes, une particule n'est plus assimilée à un point, mais à une « corde », *i.e.*, une courbe, par exemple un petit cercle (c'est la théorie des cordes fermées). Les diagrammes de Feynmann deviennent alors des surfaces

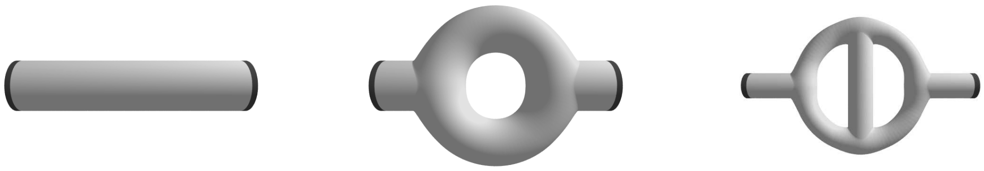

FIG. 5: *La théorie des cordes fermées*

à bord et l'opération de faire la moyenne devient l'intégration sur les espaces de modules $\mathscr{M}_{g,2}$ correspondants.

3 Des opérades géométriques aux opérades algébriques

Il existe différentes manières d'associer un objet algébrique à un objet géométrique : le groupe fondamental[4], l'homotopie, les complexe de chaînes singulières, l'homologie, etc. Plus généralement, chacune de ces opérations va transformer une opérade géométrique en une opérade algébrique. Ainsi, les algèbres de Lie sont décrites par l'homologie de notre espace de modules en degré $n-2$,

$$\left(H_{n-2}(\mathscr{M}_{0,n+1})\right)_n .$$

En premant toute l'homologie de $\mathscr{M}$, on obtient ce que l'on appelle une algèbre de gravité. En prenant l'homologie d'opérades géométriques proches de celle des petits disques, on obtient d'autres algèbres (Gerstenhaber, Batalin–Vilkovsky, algèbre de Lie homotopique) et en prenant des invariants plus fins (quelque chose entre le complexe des chaines singulières, trop gros, car de dimension infinie, et l'homologie, invariant trop grossier) on obtient des opérades que les physiciens n'ont pas encore rencontrées.

4 Remarques finales

Sur bien des détails, les considérations précédentes ne sont pas satisfaisantes. Dans l'opérade $\mathscr{M}_{0,n+1}$, il y a un point qui joue un rôle particulier, ce qui rompt la symétrie : c'est le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui devrait agir sur $\mathscr{M}_{0,n+1}$, pas $\mathfrak{S}_n$. De plus, cela ne se généralise pas en genre supérieur : les espaces de modules $\mathscr{M}_{g,n}$ sont reliés entre eux par des morphismes, mais ne forment pas une opérade ; c'est beaucoup plus compliqué.

La notion d'opérade elle-même, malgrès son utilité, est parfoir trop limitative : il y a des structures algèbriques qui ne se prètent pas à une description par des opérades, par exemple les cogèbres (en particulier les bigèbres de

4. Rappelons de quoi il s'agit : on part d'un espace topologique et d'un point $x \in X$. On considère l'ensemble des lacets basés en x, *i.e.*, l'ensemble des chemmins tracés sur X partant de x et y revenant. En mettant les lacet bout à bout, on obtient une loi de composition interne. En identifiant deux lacets *homotopes*, *i.e.*, que l'on peut déformer de l'un en l'autre, on obtient un groupe : c'est le groupe fondamental, noté $\pi_1(X,x)$. Je laisse le lecteur se convainre, avec force dessins, que $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \pi_1(\mathbb{C}) = 0$, *i.e.*, tout lacet dans le plan ou dans la sphère est homotope à un point ; que $\pi_1(\mathbb{C}^\times) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ et que $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$. On peut vérifier que le groupe fondamental est un *invariant* : les groupes fondamentaux d'espaces topologiques pointés homéomorphes sont isomorphes. Les autre invariant que je cite (homologie, cohomologie) sont du même accabit.

Hopf, les groupes quantiques).[5]

Avant de clore cet exposé, donnons quelques applications des opérades dans d'autres domaines. En topologie, par exemple, on peut caractériser les espaces de lacets itérés grace à des opérades [S]. Il existe d'autres utilisations en physique théorique et en théorie des catégories, par exemple une présentation non calculatoire et une généralisation des algèbres d'opérateurs de vertex [Be].

Références

[Ba] J.C. Baez, *An introduction to n-categories*, `q-alg/9705009`.

[Be] R.E. Borcherds, *What is a vertex algebra ?*, `q-alg/9709033`.

[KSV] T. Kimura, J. Stasheff, and A.A. Voronov, *On operad structures of moduli spaces and string theory*, Comm. Math. Phys. **171** (1995), 1–25, `hep-th/9307114`.

[LSV] J.L. Loday, J.D. Stasheff, and A.A. Voronov (eds.), *Operads : Proceedings of the renaissance conferences*, Contemp. Math., vol. 202, 1997.

[M] J.P. May, *Definitions : operads, algebras and modules*, In Loday et al. [LSV], pp. 1–7.

[S] J. Stasheff, *The pre-history of operads*, In Loday et al. [LSV], pp. 9–14.

5. La notion d'opérade est aussi liée à celle d'algèbre universelle, que connaissent bien les informaticiens.