# 1. Logique, ensembles, fonctions, relation d'ordre

## Raisonnement

**1.** Traduire les assertions suivantes en langage mathématique, à l'aide de quantificateurs.
**a.** « Il est nécessaire que $b^2 - 4ac$ soit positif ou nul pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admette au moins une solution réelle, pour $a$, $b$ et $c$ réels quelconques. »
**b.** « La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique. »
**c.** « La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique, de période $T$. »
**d.** « Un réel positif est toujours le carré d'un réel. »
**e.** « La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante. »
**f.** « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. »
**g.** « Le réel $m$ est un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. »

**2.** Soit $E$ un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On considère l'assertion

$$\mathscr{P} : \quad \forall a \in E \quad \exists x \in E \quad \exists y \in E$$
$$\Big(f(x) = a \quad \text{ou} \quad \big(f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y\big)\Big).$$

**a.** Traduire $\mathscr{P}$ en français.
**b.** Écrire « non $\mathscr{P}$ » et la traduire en français.
**c.** Si $E = \mathbb{N}$, l'assertion $\mathscr{P}$ est elle vraie pour toute application $f$ ?

**3.** On considère les assertions

$$\mathscr{P} : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad 2x + y = 0,$$
$$\mathscr{Q} : \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 2x + y = 0.$$

**a.** L'assertion $\mathscr{P}$ est-elle vraie ?
**b.** Sa négation « non $\mathscr{P}$ » est-elle vraie ? Écrire « non $\mathscr{P}$ ».
**c.** L'assertion $\mathscr{Q}$ est-elle vraie ?
**d.** Sa négation « non $\mathscr{Q}$ » est-elle vraie ? Écrire « non $\mathscr{Q}$ ».
**e.** Les assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont-elles équivalentes ?

## Raisonnement par l'absurde

**4. a.** Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
**b.** Montrer que $\ln 5/\ln 2 \notin \mathbb{Q}$.

**5.** Soit $n$ un entier. Montrer que $n$ est multiple de 3 si et seulement si $n^2$ est un multiple de 3.

## Raisonnement par contraposée

**6.** Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
**a.** $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad (1 - 2a^2)(3b - 1) = 5 - 2b^2 \implies b \neq 1.$
**b.** Pour tous $x$, $y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$y^5 \ln(1 + x) - xy^3 + \tfrac{1}{2}x^2 = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y \neq 1).$$

## Raisonnement par récurrence

**7. a.** Montrer par récurrence sur $n$ que $\forall n \geqslant 5 \quad n! \leqslant n^{n-2}$.
**b.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a > 0$, on a $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$. Donner une autre démonstration à l'aide de la formule du binôme de Newton.
**c.** Développer $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^n})$.

## Ensembles

**8. a.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $X$. Comparer $A \setminus (B \setminus C)$ et $(A \setminus B) \setminus C$.
**b.** Montrer $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
**c.** Montrer $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
**d.** Montrer $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
**e.** Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

## Binôme de Newton

**9.** Calculer les quantités suivantes.
**a.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k C_n^k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$
**d.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k$ **e.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k$

**10.** Les quantités suivantes sont-elles entières ?
**a.** $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ **b.** $n!\,2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ **c.** $\dfrac{(2n+1)!\,3^n}{(3n)!}$

## Dénombrement

**11.** Soient $X_n$ un ensemble à $n$ éléments, $X_m$ un ensemble à $m$ éléments et $X = X_n \amalg X_m$ leur somme disjointe, qui comporte $n + m$ éléments.
**a.** Soient $k \in [\![0, \min(n,m)]\!]$ et $j \in [\![0,n]\!]$. Quel est le nombre de parties de $X$ à $k$ éléments dont exactement $j$ dans $X_n$ ?
**b.** Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$. **c.** Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2$.

## Cet effrayant symbole $\sum$

**12.** Peut-on mettre quelque chose à la place des points d'interrogation pour que les identités suivantes soient vérifiées (les $a_{i,j}$ sont des réels) ?
**a.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{i,j}$ **b.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{i,j}$

## Injections, surjections

**13.** On considère les applications

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 5n + 7 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x + 7. \end{array}\right.$$

**a.** L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?
**b.** Déterminer $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{-2,2\})$, $f^{-1}(\mathbb{N})$.
**c.** L'application $g$ est-elle injective ? surjective ?
**d.** Déterminer $g^{-1}(\{-2\})$, $g^{-1}(\{2\})$, $g^{-1}(\{-2,2\})$, $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

**14.** Soient $X$ et $Y$ deux ensembles et $f$, $g$ deux applications

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y.$$

**a.** Montrer que si $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, alors $f$ est injective et $g$ est surjective.
**b.** Que peut-on dire de $f$ et $g$ si $f \circ g = \mathrm{Id}_X$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ ?

**c.** Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans la situation suivante.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{n}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

**15.** Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b, a^2+b^2+2ab). \end{array} \right.$$

**a.** Est-elle injective? surjective? bijective?
**b.** Déterminer $f(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et $f^{-1}(\{ (0,0),(1,0) \})$.

**16.** Soient $A$ et $B$ des parties de $\mathbb{R}$. Dire, dans les cas suivants, si l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$$

est injective, surjective, bijective.

**a.** $A = B = \mathbb{N}$ **b.** $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$
**c.** $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}_+$ **d.** $A = [-1,1]$ et $B = [0,1]$
**e.** $A = B = \mathbb{R}_+$

**17.** Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, *i.e.*,

$$\lfloor x \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leqslant x \}.$$

Montrer que l'application suivante est bijective.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor. \end{array} \right.$$

## Inégalités

**18.** Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $-2 \leqslant a \leqslant 5$ et $-3 \leqslant b \leqslant -1$. Encadrer $a-b$, $a/b$, $ab$, $|a-b|$.

**19.** Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} - e^x. \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall x \in [0,3] \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

**20.** Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $|a| = \max\{ a, -a \}$.
**a.** Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|$.
**b.** Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad |a| - |b| \leqslant |a-b|$.
**c.** Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \big| |a| - |b| \big| \leqslant |a-b|$.
**d.** Soient $x_0$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ tels que $|x - x_0| < \alpha$. Trouver un encadrement de $x$ et de $|x|$.

## Bornes supérieures et inférieures

**21.** Calculer la borne supérieure et inférieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes. Dire si elles possèdent un plus grand élément et un plus petit élément.
**a.** $\{ x \in \mathbb{D} \ : \ 0 < 3x \leqslant 1 \}$ **b.** $\{ x \in \mathbb{Q}_+ \ : \ x^2 \leqslant 2 \}$
**c.** $\Big( [0,2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Big) \cup \Big( ]0,\sqrt{10}[ \cap \mathbb{Q} \Big)$
**d.** $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n, \text{ où } n \in \mathbb{N}^\times \right\}$

**22.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$
**a.** Comparer $\sup(A \cup B)$ et $\max(\sup A, \sup B)$.
**b.** Comparer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$.
**c.** On suppose que $A$ et $B$ sont non vides et que

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \leqslant y.$$

Montrer que $A$ est majorée, $B$ minorée et que $\sup A \leqslant \inf B$.