6. Polynômes et fractions rationnelles

Trinôme du second degré, racines de l'unité

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.
a. $2e^u - e^{-u} = 2i$
b. $iZ^3 + 2(1-i)Z^2 - (\sqrt{3}+4)Z + 2\sqrt{3} = 0$
c. $z^3 + 2 = 2i$ **d.** $\cos z = i\sqrt{3}$

Polynômes

2. a. Y a-t-il des polynômes bornés ?
b. Y a-t-il des polynômes périodiques ?
c. La fonction $f(t) = \sin t$ est-elle un polynôme ?
d. La fonction $g(t) = \sin(t^2)$ est-elle un polynôme ?
e. La fonction $h(t) = t^{1/3}$ est-elle un polynôme ?

3. Que dire des coefficients, puis des racines, d'un polynôme pair ? d'un polynôme impair ?

4. a. Soient $f(X)$ et $g(X)$ deux polynômes. Que dire du degré de $f(X)g(X)$? de $f(X)+g(X)$? de $f(g(X))$?
b. La *valuation* d'un polynôme est le degré de son monôme non nul de plus bas degré. Quel est la valuation d'un produit ? Que dire de la valuation d'une somme ?

Racines et factorisation

5. En utilisant le théorème de décomposition d'un polynôme à coefficients réels en produit de facteurs irréductibles, montrer que tout polynôme réel de degré impair possède une racine. Connaissez-vous une autre démonstration de ce résultat ?

6. Montrer que les ensembles suivants sont égaux.
a. $\{\, P \in \mathbb{R}[X] \ : \ P(1) = 3,\ P(2) = 2,\ P(3) = 1 \,\}$
b. $\{\, P \in \mathbb{R}[X] \ : \ (X-1)(X-2)(X-3) \mid P(X) + X - 4 \,\}$

7. a. Factoriser $X^4 + X^3 + 3X^2 - 5X$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.
b. Montrer que $Q = X^5 + X^3 - 8X^2 - 8$ est divisible par $X^3 - 8$. Le factoriser sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

8. Notons $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ et $j = e^{2\pi i/3}$. Calculer $P(j)$ et $P'(j)$ et en déduire la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

9. a. Pour quelles valeurs de n le polynôme X^2+X+1 divise-t-il $X^{2n} + X^n + 1$?
b. Trouver a et b tels que $x^2 + 1 \mid (ax+b)(x^5+1) - (5x+1)$.

Relations entre coefficients et racines

10. Soient α, β et γ les racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$.
a. Exprimer a, b et c en fonction de α, β et γ.
b. Exprimer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ en fonction de a, b et c.

11. Trouver un polynôme de degré 3 dont les racines sont les carrés des racines de $x^3 - x^2 + 3x - 10$.

Racines de d'unité

12. a. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (distinguer deux cas, selon la parité de n).
b. Factoriser $X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
c. Factoriser $(X-1)^7 - 7$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Racines de l'unité et calculs trigonométriques

13. a. Quelles sont les solutions complexes de $Y^n = 1$? En déduire la factorisation du polynôme $Q(Y) = Y^n - 1$ puis celle de $P(X) = (X+1)^n - 1$.
b. Développer P à l'aide de la formule du binôme de Newton.
c. En déduire la valeur de
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\exp \frac{2k\pi i}{n} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

14. Comme dans l'exercice précédent, calculer
$$\sum_{i=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}$$
à l'aide du polynôme $(X-1)^n - (X+1)^n$.

Théorème de Rolle

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme avec n racines réelles distinctes. Montrer que sa dérivée P' a au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

16. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} = 0.$$
Montrer que le polynôme $P(X) = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_0$ a au moins une racine dans $]0,1[$. (Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à une primitive de P.)

17. Considérons $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) - k$.
a. Que dire des zéros de f' et de leurs multiplicités ?
b. Que dire de la multiplicité des zéros de f ?

Formules de Taylor

18. Qu'obtient-on en appliquant la formule de Taylor à l'ordre $k \geqslant n$ au polynôme $P(x) = x^n$ entre a et $a+h$?

19. Décomposer $P = X^5 - X^3 + 2X - 125$ selon les puissances de $X - 3$.

Division selon les puissances croissantes

20. Diviser A par B selon les puissances croissantes jusqu'à un reste d'ordre n.
a. $A(X) = X - 1, \quad B(X) = X^4 - X^2 + 1, \quad n = 3.$
b. $A(X) = 1, \quad B(X) = 1 - X, \quad n$ quelconque.
c. $A(X) = X^m - 1, \quad B(X) = X - 1, \quad n = m.$

Division euclidienne

21. Soient a, b et c trois réels distincts.
a. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X - a$?
b. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$?
c. Examiner le cas $a = b = c$.

22. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $P = (X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$?

Théorème de Bézout

23. Soient f, g et h des polynômes.
a. Montrer que si f et g sont premiers entre eux, et $h \mid f$, alors $h \wedge g = 1$.
b. Montrer que si f et g sont premiers entre eux, alors $(fh) \wedge g = h \wedge g$.

Algorithme d'Euclide

24. a. Montrer que les polynômes
$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 6$$
$$Q(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$$
posèdent un couple de racines complexes conjuguées en commun.
b. Déterminer tous les couples (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^7 + 1)U + (X^3 - 1)V = X + 1$.
c. Pour quelles valeur de $r \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^4 + X^2 + r^2$ et $X^2 - X + r$ sont-ils premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$?

Théorème des restes chinois

25. Trouver tous les polynômes P dont le reste de la division euclidienne par $(X-1)^3$ et par $(X+1)^3$ est égal à 1.

Fractions rationnelles

26. On pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
a. En intégrant F_n par parties, trouver une relation entre F_n et F_{n+1}.
b. En déduire F_3.

27. Décomposer en éléments simples et calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes.
a. $\dfrac{X+1}{X^2(X-1)^2}$ **b.** $\dfrac{X^2+9}{(X+2)(X^2+2X+5)}$
c. $\dfrac{1}{X^2(1+X^3)}$ **d.** $\dfrac{X^6+1}{X^4-1}$
e. $\dfrac{1}{3X^4+10X^2+3}$ **f.** $\dfrac{X+1}{X(X^2+X+1)^2}$

28. En utilisant ses propriétés de parité, décomposer
$$\frac{16X}{(X-1)^3(X+1)^3}$$
en éléments simples. En déduire ses primitives sur $]-1, 1[$.

29. a. Décomposer $F(X) = \dfrac{2X-1}{(X+2)(X+1)^4}$ en éléments simples. (Indication : On pourra effectuer le changement de variable $Y = X + 1$ puis diviser $-3 + 2Y$ par $1 + Y$ selon les puissances croissantes, jusqu'à un reste d'ordre quatre.)
b. De même, décomposer $\dfrac{X+2}{X^2(X-1)^5}$ en éléments simples

30. Quels sont les polynômes multiples de leur dérivée? (Indication : on pourra calculer P'/P.)

31. Décomposer $\dfrac{1}{X(X+1)}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp \frac{1}{k(k+1)}$.

32. Décomposer $\dfrac{X^{2m}-1}{X^{2m+1}-1}$.

Problèmes

33. (Polynôme interpolateur de Lagrange) Considérons des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tous différents.
a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_k de degré au plus n tel que $L_k(x_i) = 0$ si $k \neq i$ et $L_k(x_k) = 1$.
b. Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]\ P(x_i) = y_i$.
c. Trouver tous les polynômes P réels tels que
$$(x-1)(x-2)(x-3) \mid (P(x))^5 - x.$$

34. On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Soit donc P un tel polynôme. Pour commencer supposons P non constant.
a. Soit α une racine de P. Montrer que α^2 est encore une racine de P. En déduire que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
b. Soit α une racine de P. Montrer que $(\alpha - 1)^2$ est encore une racine de P.
c. Conclure.

35. On cherche des polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$P_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$
a. Montrer que si P_n existe, alors il est unique.
b. Donner P_1, P_2, P_3.
c. En développant $(X + 1/X)^{n+1}$, calculer P_{n+1} en fonction de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
d. Montrer que $P_{n+1}(t) = tP_n(t) - P_{n-1}(t)$.
e. Résoudre $2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$ en posant $t = x + 1/x$.

36. (Polynômes de Tchebychev) Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
a. Calculer P_1, P_2, P_3.
b. Calculer P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}.
c. Montrer que P_n est un polynôme.
d. Quel est son degré? Son terme dominant? Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
e. Quelles sont les racines de P_n sur $[-1, 1]$? Sur $\mathbb{R}$?
f. Quelles sont les racines de P'_n ?