Exercices de révision

Fonctions

1. Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

a. $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arctan x \end{cases}$

c. $\begin{cases}]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan x \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - x \end{cases}$

Nombres complexes

2. Donner partie réelle, imaginaire, module et argument de

$$z = \frac{2(1 + \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}{(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^2} \qquad \text{où } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

3. Quelles sont les racines $9^{\text{ièmes}}$ de $-512i$?

Arithmétique

4. Résoudre $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

5. Trouver tous les couples $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$30 \mid mn(m^4 - n^4).$$

6. a. Calculer $d = \mathrm{pgcd}(154, 700)$.
b. Trouver un couple d'entiers (a,b) vérifiant $154a + 700b = d$.
c. Les déterminer tous.

7. Résoudre $x^2 - \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$. [Indications : $143 = 11 \cdot 13$ n'est pas un nombre premier ; 1 et 3 ne sont pas les seules solutions.]

8. Montrer que tout entier peut s'écrire sous la forme $6a + 10b + 15c$, où a, b, $c \in \mathbb{Z}$.

9. Trouver tous les $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} x \wedge y + x = 210 \\ x \vee y + x = 390. \end{cases}$$

Polynômes

10. Soit $P(x) = (X-1)^n - (X+1)^n$.
a. Quel est le degré du polynôme P ? Quel est son coefficient dominant ?
b. Quelles sont ses racines ?
c. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}$.

11. a. Montrer que les polynômes

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 6$$
$$Q(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$$

posèdent un couple de racines complexes conjuguées en commun.
b. Trouver tous les polynômes A et B tels que $AP + BQ = P \wedge Q$.

12. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $X^3 + X^2 + X \mid (X+1)^n - X^n - 1$.

Suites

13. Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent en $n \longrightarrow +\infty$ de

$$u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

14. a. Quelle est la limite de la suite définie par

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \sin u_n} ?$$

b. Montrer que la quantité $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ possède une limite finie quand $n \longrightarrow +\infty$.
c. En déduire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

15. Soit $\alpha > 0$. Étudier la suite définie par

$$u_0 \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = \arctan(\alpha u_n).$$

Dérivation

Fonctions usuelles

16. a. Simplifier $\arcsin \cos x$.
b. Simplifier $\arctan x + \arctan(1/x)$. [Indication : dériver.]

Développements limités

17. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\ln \mathrm{Sh}\, x} - \sqrt[3]{x}$.

18. a. Trouver un équivalent en 0 de $\sin \mathrm{Sh}\, x - \mathrm{Sh} \sin x$.
b. Trouver un équivalent en 0 de $x^x - (\sin x)^{\sin x}$.

19. a. Calculer le développement limité de $\arctan x$ en $x = 0$.
b. Montrer qu'il existe des réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et dire lesquels) tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \arctan x \underset{x\to+\infty}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.
c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}\right)^{x^2}$.