Contrôle 1 — 30 Octobre 2000 — Groupe 4

Question de cours (3 points)

a. Énoncer et démontrer *les* inégalités triangulaires dans $\mathbb{C}$.

b. Comment peut-on les interpréter géométriquement ?

Exercice 1 (3 points)

Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b, a^2+b^2+2ab). \end{array} \right.$$

a. Est-elle injective? surjective? bijective?

b. Déterminer $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et $f^{-1}(\{ (0,0), (1,0) \})$.

Exercice 2 (4 points)

a. Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1993}$.

b. Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

c. Soient A, B, C des points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le triangle (ABC) soit équilatéral direct.