1. Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

1. a. Soit X un ensemble. Montrer que l'ensemble des fonctions de X vers $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel.
b. Soit V un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des fonctions de X vers V forme un espace vectoriel.

Exemples de sous-espaces vectoriels

2. Les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
a. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2 \}$ **b.** $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \}$
c. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$
d. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax + by = c \}$ (discuter selon a, b et c)

3. Décrire *tous* les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

4. Les ensembles suivants de suites $u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
a. Les suites convergentes. **b.** Les suites non convergentes.
c. Les suites tendant vers 0. **d.** Les suites tendant vers π.
e. Les suites constantes à partir d'un certain rang.

5. L'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes forment-elles un sous-espace vectoriel ?
a. Les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
b. Les fonctions s'annulant au moins une fois.
c. Les fonctions s'annulant au point 2.
d. Les solutions de l'équation différentielle $y''' - y'' + y' - y = 0$.
e. Les fonctions croissantes.
f. Les fonctions pouvant s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
g. Les fonctions périodiques de période T.
h. Les fonctions périodiques de période quelconque.
i. Les fonctions périodiques de période rationnelle.
j. Les fonctions s'annulant sur un intervalle (non préalablement fixé : il peut dépendre de la fonction) non vide centré en zéro.
k. Les fonctions dont l'image est finie.
l. Les fonctions dont l'image est de cardinal infini.
m. Les fonctions f telles que $\exists A_f \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant A_f\,|x|$.
n. Les fonctions de la forme $f : x \longmapsto a\cos(x - \varphi)$, où a et φ sont des réels.

Manipulations ensemblistes sur les sous-espaces vectoriels

6. Soient A et B des sous-espaces d'un espace vectoriel E.
a. Montrer que $A \cup B$ est un sous-espace si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.
b. Montrer que $A + B = \operatorname{Vect} A \cup B$.

7. Soient A, B et C des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Établir les inclusions suivantes et montrer qu'en général, il n'y a pas égalité.
a. $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.
b. $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.

8. Soient A, B, C des sous-espaces d'une espace vectoriel E.
a. Montrer $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.
b. Montrer $A \cap (B + (A \cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
c. Montrer $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

Sommes directes

9. a. Montrer que les fonctions paires et impaires forment des sous-espaces vectoriels P et I de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En remarquant que pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \tfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big),$$
montrer que $E = P \oplus I$.
b. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe des sous-espaces $E = \operatorname{Vect}\{ (1,\ldots,1) \}$ et $F = \{ (x_i)_i \ : \ \sum x_i = 0 \}$

10. a. Soient A et B des sous-espaces de E et C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrer que $A + B = A \oplus C$.
b. Soient A et B des sous-espaces de E et A' et B' des supplémentaires de $A \cap B$ dans A et B. Montrer que $A + B = A \cap B \oplus A' \oplus B'$.

11. a. Montrer que si $E = A \oplus B$ et $A \subset C \subset E$, alors $C = A \oplus (B \cap C)$.
b. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ et F_i des sous-espaces de E_i. Montrer que la somme des F_i est directe. Déterminer $(\bigoplus_j F_j) \cap E_i$.

12. a. Est-il vrai que la somme $A + B + C$ est directe si et seulement si $A \cap B \cap C = 0$?
b. Montrer que la somme $A + B + C + D$ est directe si et seulement si $(A + B) \cap (C + D) = (A + C) \cap (B + D) = (A + D) \cap (B + C) = 0$.

Familles libres, liées

13. Les familles suivantes sont-elles libres ?
a. $((a,1,1), (1,a,-1), (1,-1,0))$ (discuter selon a).
b. $(e^x, \ln(1 + x^2), \sin x, 2x/(1 + x^2))$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
c. $(f_k(t) = \cos kt)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
d. $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, où $\varphi_a \ : \ x \longmapsto \sin(x + a)$ et $a,b,c \in [0,\pi[$ sont tous distincts.
e. $(f, f^2, \ldots, f^n)$, dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, où la fonction f est définie par $x \longmapsto \ln(1 + x)$ et $f^n = f \circ \cdots \circ f$.
f. $(x \longmapsto |x - a_i|)_{i \in I}$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, où $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels distincts.

14. a. Comparer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2,3,-1)$ et $(1,-1,2)$ avec celui engendré par $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$.
b. Montrer que le sous-espace de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les $x \longmapsto \cos nx$ coïncide avec celui engendré par les $x \longmapsto \cos^n x$.

15. a. Soient $f_0, \ldots, f_n$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$. Montrer que si les vecteurs
$$\Big(f_0^{(k)}(x)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n} \quad \Big(f_1^{(k)}(x)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n} \quad \cdots \quad \Big(f_n^{(k)}(x)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$
sont linéairement indépendants, alors les f_i sont aussi linéairement indépendantes.
b. Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs. On définit une autre famille par $y_i = \sum_{j=1}^i x_j$. Montrer que l'une est libre si et seulement si l'autre l'est.
c. Soient j et k des entiers et α un réel. Montrer que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre si et seulement si la famille $(y_i)_i$ l'est, où $y_i = x_i$ si $i \neq j$ et $y_j = x_j + \alpha x_k$.

16. **a.** Montrer que $(1,-1,1)$, $(-1,2,1)$, $(1,0,3)$ sont liés. Donner une relation entre ces vecteurs. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent.
b. Montrer que la famille $(X^2+X+1, X^2+X, X^2+X+2)$ est liée. Donner une relation entre ces vecteurs. Donner une base du sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ qu'il engendrent.

Bases

17. **a.** Démontrer que les vecteurs $(1,0,1,0)$, $(1,-1,2,1)$, $(-1,1,-1,-2)$ et $(0,-1,-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Quelles sont les coordonnées de $(1,2,2,-3)$ dans cette base?
b. Soit (e_1,e_2,e_3) une base d'un espace vectoriel E. Montrer que $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ est encore une base de E. Exprimer e_3-e_2 dans cette base.
c. Montrer que les polynômes X^3+1, X^3-1, X^2+X+1, $X-1$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Quelles sont les coordonnées de aX^3+bX^2+cX+d dans cette base?
d. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P dans cette base (en fonction de $P(a)$, $P'(a)$, $P''(a)$, etc.)?
e. Montrer que les $P_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k X^k$, pour $i \in \mathbb{N}$, forment une base de $\mathbb{R}[X]$. Quelles sont les coordonnées du polynôme $3X^3-2X^2+X-1$ dans cette base?

Théorème de la base incomplète

18. Décrire un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants.
a. $\mathrm{Vect}\{(1,1,1), (1,-1,-1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
b. $\mathrm{Vect}\{X^2+1, X^2+X+1\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
c. $\mathrm{Vect}\{X^2+1, X^2+X+1\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
d. $\mathrm{Vect}\{X^2+1, X^2+X+1\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Sous-espaces vectoriels définis par une (ou des) équation(s)

19. **a.** Montrer que $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x+y-z = x+z-t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base.
b. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;:\; P(1)=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. En donner une base.

20. **a.** Trouver des réels a, b, c tels que
$\mathrm{Vect}\{(0,1,1), (1,1,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; ax+by+cz=0\}$.
b. Donner une représentation cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,0,1,0)$ et $(1,-1,2,1)$.

21. Donner une base de $E\cap F$, $E\cap G$ et $G\cap H$ où

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (1,1,0)\}, \\ F &= \mathrm{Vect}\{(1,1,1), (1,0,0)\}, \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y-2z=0\}, \\ H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x-2y=0\}. \end{aligned}$$

22. Donner une base de $E+F$ et $E+G$ où

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y+z = x-y = 0\} \\ F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y+z = y-z = 0\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Dimension

23. Soient A et B des sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que si $\dim A + \dim B > n$, alors $A\cap B \neq 0$.

24. **a.** Peut-on trouver deux supplémentaires de

$$\mathrm{Vect}\{(1,1,1), (1,-1,-1)\}$$

dans $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection est nulle?
b. Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E, peut-on trouver des supplémentaires G_1 et G_2 de F dans E tels que $G_1 \cap G_2 = 0$?

25. Soient A, B et C des sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.
a. Monter que

$$\begin{aligned} \dim(A+B+C) \leqslant{} & \dim A + \dim B + \dim C \\ & - \dim(A\cap B) - \dim(B\cap C) \\ & - \dim(C\cap A) + \dim(A\cap B\cap C). \end{aligned}$$

b. Donner un exemple de sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'inégalité est stricte.

26. Soient $U_1, \dots, U_k$ des sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ dans un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geqslant n-k.$$

Divers

27. Montrer que

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;:\; \int_0^1 P(x)\,dx = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. En donner une base. Quelle est sa dimension? Trouver un supplémentaire de E.

28. Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
a. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles.
b. Donner une base de F. (Indication : on pourra chercher des suites géométriques dans F.)
c. Dans cette base, quelles sont les coordonnées de la suite de F définie par $u_0 = a$ et $u_1 = b$?