6. Révisions

1. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$.

2. Étudier (domaine de définition, limites, parité, dérivabilité, variations) la fonction

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(1+t^2)}.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\tan x\,dx}{(2\cos^2 x+3)\cos x}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{4\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$. (Indication : ce n'est pas 0.)

5. Calculer $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx$ pour $m,\,n\in\mathbb{N}$.

6. On note $A(x)=-x^3+x^2+1$ et $B(x)=-x^4-x^3$.
a. Pour $P\in\mathbb{R}_3[x]$, soit $\Phi(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire $\Phi:\mathbb{R}_3[x]\longrightarrow\mathbb{R}_3[x]$. Donner sa matrice dans la base $(1,x,x^2,x^3)$.
b. Quel est son noyau ? son image ?
c. Montrer que $\Phi^3-5\Phi^2+7\Phi-3\,\mathrm{Id}=0$. En déduire que Φ est inversible.
d. Résoudre l'équation $\Phi(P)=\lambda P$, d'inconnue $P\in\mathbb{R}_3[x]$, en discutant selon les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$.
e. Donner une base (e_1,e_2) de $\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})$ et une base (e_4) de $\mathrm{Ker}(\Phi-3\,\mathrm{Id})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}\big((\Phi-\mathrm{Id})^2\big)$ et compléter (e_1,e_2) en une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathrm{Ker}\big((\Phi-\mathrm{Id})^2\big)$. Montrer que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
f. Donner la matrice de Φ dans $\mathscr{B}=(x^2+x^3,2x+x^2-x^3,2+x+x^2+x^3,x^3)$. Calculer la matrice de Φ^n dans $\mathscr{B}$, puis dans la base canonique, pour $n\in\mathbb{Z}$.

7. Même exercice avec $A(x)=-x^3+x^2-x+1$, $B(x)=-x^4-x$, $(\Phi-\mathrm{Id})\circ(\Phi-4\,\mathrm{Id})=0$, une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})$, une base (e_4) de $\mathrm{Ker}(\Phi-4\,\mathrm{Id})$, $\mathscr{B}=(x^2+x^3,1+x^3,3+x+2x^2+4x^3,-x+x^2-x^3)$.

8. Même exercice avec $\mathbb{C}[x]$, $A(x)=-x^3-x^2+x-1$, $B(x)=-x^4+1$, $(\Phi+2\,\mathrm{Id})\circ(\Phi^2+4\,\mathrm{Id})=0$, une base (e_1,e_2) de $\mathrm{Ker}(\Phi+2\,\mathrm{Id})$, une base (e_3) de $\mathrm{Ker}(\Phi-2i\,\mathrm{Id})$, une base (e_4) de $\mathrm{Ker}(\Phi+2i\,\mathrm{Id})$ et $\mathscr{B}=(x+x^3,1+x^2,1-ix-x^2+ix^3,1+ix-x^2-ix^3)$.

9. On dit qu'une matrice $X\in\mathscr{M}_n$ est *symétrique* si ${}^tX=X$.
a. Montrer que les matrices symétriques forment un sous-espace vectoriel $\mathscr{S}_n$ de $\mathscr{M}_n$. Quelle est sa dimension ?
b. Soit $A\in\mathscr{M}_n$. Montrer que l'application

$$\Psi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{S}_n & \longrightarrow & \mathscr{S}_n\\ X & \longmapsto & {}^tAXA\end{array}\right.$$

est linéaire.
c. On prend dorénavant $n=2$ et $A=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.
Donner la matrice de Ψ dans une base de votre choix.
d. Trouver le noyau et l'image de Ψ.
e. Résoudre l'équation $\Psi(X)=\lambda X$, d'inconnue $X\in\mathscr{S}_n$, en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$.
f. Donner une base $\mathscr{B}_\lambda$ de $\mathrm{Ker}(\Psi-\lambda\,\mathrm{Id})$. Montrer que $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2\cup\mathscr{B}_4$ est une base de $\mathscr{S}_2$. Donner la matrice de Ψ puis de Ψ^n (pour $n\in\mathbb{Z}$) dans cette base puis dans la base choisie plus haut.

10. a. Montrer que l'application

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2\\ X & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)X+X\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\end{array}\right.$$

est linéaire.
b. Donner sa matrice dans une base de votre choix.
c. On note $E_n=\mathrm{Ker}\big((\varphi-\mathrm{Id})^n\big)$. Montrer que $E_n\subset E_{n+1}$. Donner une base (e_1,e_2) de E_1, la compléter en une base (e_1,e_2,e_3) de E_2, puis en une base (e_1,e_2,e_3,e_4) de E_3. Montrer c'est en fait une base de $\mathscr{M}_2$.
d. Donner la matrice de φ, puis de φ^n, pour $n\in\mathbb{Z}$, dans la base $\mathscr{B}=\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\1&-1\end{smallmatrix}\right)\right)$ puis dans la base choisie plus haut.

11. On pose $M=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$.
a. Montrer que $M^2+2M-3I_3=0$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
b. Montrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n\in\mathbb{N}\quad M^n=u_nM+v_nI_3$.
c. Montrer que pour tout n, on a $u_n+v_n=1$, puis que $u_{n+1}=-3u_n+1$. Trouver α tel que la suite définie par $w_n=u_n-\alpha$ soit géométrique. En déduire u_n, v_n et M^n en fonction de n.