Contrôle 2 — 2 Avril 2001 — Groupes 4–5–6

Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercice 1

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z+2t \\ y-z+t \\ x-y+3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

a. Montrer que f est linéaire.

b. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Quel est le rang de la famille $\big(f(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$? Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base.

Exercice 2

Quelles sont les primitives de la fonction $e^x \sin x$?

Exercice 3

Calculer $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$.