Construction de morphismes de topos

Vincent Zoonekynd
d'après MacLane–Moerdijk

19 avril 2000

Le but de cet exposé est de donner des conditions sous lesquelles un foncteur entre des petits sites $(\mathfrak{C},J)\longrightarrow(\mathfrak{D},K)$ donne naissance à un morphisme de topos $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\,(\mathfrak{C},J)\longrightarrow\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,(\mathfrak{D},K)$ ou $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\,(\mathfrak{D},K)\longrightarrow\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,(\mathfrak{C},J)$. Plus précisément, nous montrerons que

- Si la catégorie $\mathfrak{C}$ possède des limites projectives finies, si le foncteur $(\mathfrak{C},J)\longrightarrow(\mathfrak{D},K)$ préserve ces limites et s'il préserve les cribles couvrants (*i.e.*, si le crible engendré par l'image d'un crible couvrant est encore couvrante), alors il définit un morphisme de topos $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\,(\mathfrak{D},K)\longrightarrow\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,(\mathfrak{C},J)$;
- Si le foncteur $\pi : (\mathfrak{D},K)\longrightarrow(\mathfrak{C},J)$ possède la propriété de relèvement des cribles, *i.e.*, si tout crible d'un objet πD est rafiné par l'image d'un crible couvrant de D, alors il définit un morphisme de topos $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\,(\mathfrak{D},K)\longrightarrow\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,(\mathfrak{C},J)$.

1 Topologies de Lawvere–Tierney

Avant toute chose, nous allons donner une autre présentation de la notion de faisceau sur un petit site $(\mathfrak{C},J)$ à l'aide d'une topologie de Lawvere–Tierney sur le copos $\widehat{\mathfrak{C}}$ des préfaisceaux. Il s'agit de rappels : nous ne démontrerons rien.

Notations. — Nous noterons $\widehat{\mathfrak{C}}=\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}=\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}},\mathfrak{Ens})$ la catégorie des préfaisceaux sur une catégorie $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,(\mathfrak{C},J)$ la catégorie des faisceaux sur un petit site $(\mathfrak{C},J)$. Nous noterons $y:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ le plongement d'Yoneda.

Proposition. — *Si $\mathscr{T}$ est un topos, le foncteur*

$$\begin{cases} \mathscr{T} & \longrightarrow \mathfrak{Ens} \\ X & \longmapsto \operatorname{Sub} X = \{\,\textit{sous-objets de } X\,\} \end{cases}$$

est représentable par un objet noté Ω et appelé le **classificateur de sous-objets** *de $\mathscr{T}$.*

Remarque. — On a donc, pout tout objet X, $\operatorname{Sub} X \simeq \operatorname{Hom}(X,\Omega)$. En particulier, pour $X = \Omega$, il vient

$$\operatorname{Sub}\Omega = \operatorname{Hom}(\Omega,\Omega).$$

Notons $t : A \rightarrowtail \Omega$ l'image de Id_Ω dans $\operatorname{Sub}\Omega$. La bijection est alors donnée par

$$\begin{cases} \operatorname{Hom}(X,\Omega) & \longrightarrow & \operatorname{Sub} X \\ \quad f & \longmapsto & f^*t. \end{cases}$$

Il revient au même de dire que les sous-objets de X sont en bijection avec les (classes d'équivalence) de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Il revient au même de dire que l'ensemble des sous-objets de X est en bijection avec les (classes d'isomorphie de) carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r] & \Omega. \end{tikzcd}$$

En fait, A est un objet terminal : tout d'abord, pour tout objet X, il existe au moins un morphisme $X \longrightarrow A$, celui correspondant au sous-objet plein $\mathrm{Id} : X \rightarrowtail X$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Montrons que ce morphisme est unique : supposons qu'il existe un objet X et deux flèches $\varphi,\varphi' : X \longrightarrow A$. On a alors deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, tail, "t"] \\ X \arrow[r, "t\circ\varphi"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, tail, "t"] \\ X \arrow[r, "t\circ\varphi'"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

D'après la propriété universelle définissant la bijection $\operatorname{Sub} X \simeq \operatorname{Hom}(X,\Omega)$, les morphismes $X \longrightarrow \Omega$ doivent être les mêmes : $a \circ \varphi = a \circ \varphi'$, car ils correspondent au même sous-objet $X \rightarrowtail X$. Mais comme a est un monomorphisme, on a $\varphi = \varphi'$.

Exemple. — 1. Dans la catégorie des ensembles, on a $\Omega = \{0,1\}$ et étant donné un sous-objet $A \rightarrowtail X$, l'application $X \longrightarrow \Omega$ qui le définit est sa fonction caractéristique.

2. Cherchons quel est le classificateur de sous-objets dans le topos des préfaisceaux sur une catégorie $\mathfrak{C}$. Comme, pour tout objet X de $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$, on doit avoir

$$\operatorname{Hom}(X,\Omega) \simeq \operatorname{Sub} X,$$

en particulier, pour tout objet C de $\mathfrak{C}$,

$$\operatorname{Hom}(yC,\Omega) \simeq \operatorname{Sub} yC.$$

Or, le premier membre est $\Omega(C)$ par le lemme d'Yoneda et l'ensemble des sous-objets de yC est l'ensemble des cribles de C. Le préfaisceau Ω (s'il existe — et on a admis qu'il existait) est donc défini par

$$\Omega(C) = \{\text{ cribles de } X\}.$$

Notation. — Le produit fibré $A \times_E B$ de deux sous-objets A et B d'un objet E d'un topos $\mathscr{T}$ est encore un sous-objet de E (leur intersection), noté $A \wedge B$. Le morphisme

$$\wedge : \operatorname{Sub} E \times \operatorname{Sub} E \longrightarrow \operatorname{Sub} E$$

peut s'écrire

$$\wedge : \operatorname{Hom}(E,\Omega) \times \operatorname{Hom}(E,\Omega) \longrightarrow \operatorname{Hom}(E,\Omega)$$

et comme le foncteur Hom est exact à gauche,

$$\wedge : \operatorname{Hom}(E,\Omega \times \Omega) \longrightarrow \operatorname{Hom}(E,\Omega).$$

Ce morphisme est fonctoriel,

$$\wedge : \operatorname{Hom}(\cdot,\Omega \times \Omega) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\cdot,\Omega),$$

d'après le lemme d'Yoneda, il provient donc d'un morphisme

$$\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Définition. — *Soit $\mathscr{E}$ un topos, Ω son classificateur de sous-objets. Une* **topologie de Lawvere–Tierney** *sur $\mathscr{E}$ est la donnée d'un morphisme j : $\Omega \longrightarrow \Omega$ tel que*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Définition. — *Si A est un sous-objet d'un objet E du topos $\mathscr{E}$, l'***adhérence** *de A, notée $\bar{A}$ est le sous-objet de E défini par le morphisme* $\operatorname{Hom}(E,j)$ *:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, mapsto] & \operatorname{Sub} E \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(E,\Omega) \arrow[d, "\operatorname{Hom}(E,j)"] \\ \bar{A} & \operatorname{Sub} E \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Hom}(E,\Omega). \end{tikzcd}$$

Remarque. — Les propriétés définissant une topologie de Lawvere–Tierney se traduisent de la manière suivante en termes d'adhérence pour deux sous-objets A et B de E :

$$A \subset \bar{A}, \qquad \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

En particulier, ça n'a rien à voir avec la notion usuelle d'adhérence en topologie.

Définition. — *On dit qu'un sous-objet A d'un objet E du topos $\mathscr{E}$ est* **dense** *si $\bar{A} = E$. On dit qu'il est* **fermé** *si $\bar{A} = A$.*

Remarque. — La classe des monomorphismes denses est stable par produits fibrés : si $A \rightarrowtail E$ est un sous-objet dense et $F \longrightarrow E$ un morphisme, alors $A \times_E F \rightarrowtail F$ est encore une sous-objet dense.

Définition. — *Un objet F du topos $\mathscr{E}$ est un j-***faisceau** *si pour tout objet E et pour tout sous-objet dense $m : A \rightarrowtail A$ de E, l'application*

$$\operatorname{Hom}(m,F) = m^* : \operatorname{Hom}(E,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,F)$$

est une bijection.

Théorème. — ***Une topologie de Grothendieck sur une petite catégorie $\mathfrak{C}$ permet de définir une topologie de Lawvere–Tierney sur sa catégorie de préfaisceaux $\widehat{\mathfrak{C}}$ et les notions de faisceaux coïncident.***

Remarque. — 1. Expliquons rapidement comment définir une topologie de Lawvere–Tierney sur $\widehat{\mathfrak{C}}$ à partir d'une topologie de Grothendieck J sur $\mathfrak{C}$. On définit une transformation naturelle

$$j_C : \begin{cases} \operatorname{Sub} C & \longrightarrow & \operatorname{Sub} C \\ S & \longmapsto & j_C(S) = \{\, g : D \longrightarrow C \mid g^*S \in J(D) \,\}. \end{cases}$$

On peut vérifier que c'est bien fonctoriel, que les propriétés définissant une topologie de Lawvere–Tierney sont bien vérifiées et que cela permet de définir une topologie sur $\widehat{\mathfrak{C}}$ (pour l'instant, j est uniquement défini sur $\mathfrak{C}$).

2. Un crible R de C est couvrant si et seulement si le sous-objet $R \rightarrowtail y(C)$ est dense.

3. L'adhérence pour une topologie de Grothendieck peut s'exprimer ainsi : soit E un préfaisceau, A un sous-objet de E et $e \in E(C)$; on a $e \in \bar{A}(C)$ si et seulement si

$$\{\, f : D \longrightarrow C \mid f^*e \in A(D) \,\} \in J(C).$$

4. La catégorie $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j)$ des j-faisceaux sur $\mathscr{E}$ est encore un topos.

Exemple. — Nous verrons plus loin (section 14 page 32 et section 10 page 28) deux exemples de topologies de Lawvere–Tierney qui ne proviennent pas directement de topologies de Grothendieck.

Proposition. — *Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{Sh}(\widehat{\mathscr{E}},j) \longrightarrow \mathscr{E}$ admet un adjoint à gauche a appelé foncteur « faisceau associé ». Ce foncteur induit une bijection entre les sous-préfaisceaux fermés d'un préfaisceau E et les sous-faisceaux du faisceau associé aE :*

$$a : \operatorname{ClSubPr} E \longrightarrow \operatorname{SubSh} aE.$$

De plus, si E est un faisceaux, ses sous-préfaisceaux fermés sont exactement ses sous-faisceaux.

2 Morphismes de topos

Définition. — *Un* **morphisme de topos** $f : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ *est la donnée d'une adjonction* $f^* \dashv f_*$ *:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[d, shift left, "f_*"] \\ \mathscr{T}' \arrow[u, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

telle que f^* *soit exact à gauche,* i.e., *commute aux limites projectives finies.*

Remarque. — Les morphismes de topos $\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ et les transformations naturelles entre les foncteurs « image directe » forment une catégorie. On peut aussi définir un morphisme de topos $f : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ comme la donnée d'un foncteur $f_* : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ possédant un adjoint à gauche exact à gauche (et un 2-morphisme $f \longrightarrow g$ comme une transformation naturelle $f_* \longrightarrow g_*$). On peut aussi définir un morphisme de topos $f : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ comme la donnée d'un foncteur $f^* : \mathscr{T}' \longrightarrow \mathscr{T}$ exact à gauche et possédant un adjoint à droite (et un 2-morphisme $f \longrightarrow g$ comme une transformation naturelle $g^* \longrightarrow f^*$). Ces trois définitions donnent des catégories $\mathfrak{Hom}(\mathscr{T},\mathscr{T}')$ équivalentes.

Exemple. — 1. Une application continue entre espaces topologiques $X \longrightarrow Y$ définit un morphisme entre les topos de faisceaux $\mathfrak{Sh}\, X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\, Y$. Pour les espaces séparés (ou même simplement sobres), on peut récupérer l'application continue à partir du morphisme de topos.

2. Si $(\mathfrak{C},J)$ est un site, le foncteur d'inclusion $i : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J) \longrightarrow \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ possède un adjoint à gauche, le foncteur faisceau associé a, qui définit un morphisme de topos

3. Un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans un topos induit un morphisme de topos $\mathscr{T}/X \longrightarrow \mathscr{T}/Y$. On a même deux adjonctions $f_! \dashv f^* \dashv f_*$ (on parle alors de morphisme de topos essentiel).

4. Pour tout topos $\mathscr{T}$, on a un morphisme vers le topos ponctuel, $\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, défini par l'adjonction $c \dashv \Gamma$ entre le foncteur « faisceau constant » c et le foncteur « section globale » Γ. Quand ce morphisme est essentiel, *i.e.*, quand le foncteur c possède un adjoint à gauche (que l'on appelle foncteur « composantes connexes »), on dit que le topos est localement connexe.

3 Adjonctions

Pour construire des morphismes de topos, il nous faut construire des adjonctions. C'est ce que nous donne le lemme suivant.

Lemme. — *Soit* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathscr{E}$ *un foncteur d'une petite catégorie* $\mathfrak{C}$ *vers un topos* $\mathscr{E}$. *Le foncteur*

$$\mathrm{Hom}(A\cdot,\cdot) : \begin{cases} \mathscr{E} & \longrightarrow \quad \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \\ E & \longmapsto \quad \begin{cases} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ C & \longmapsto \quad \mathrm{Hom}(A(C),E). \end{cases} \end{cases}$$

possède un adjoint à gauche, que nous noterons $\cdot \otimes A$,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[d, shift left, "\mathrm{Hom}(A\cdot,\cdot)"] \\ \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}. \arrow[u, shift left, "\cdot\otimes_{\mathfrak{C}} A"] \end{tikzcd}$$

Démonstration : Nous allons montrer que l'adjoint est donné par la formule

$$P \otimes A = \varinjlim \Big(\textstyle\int_{\mathfrak{C}} P \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{C} \xrightarrow{\ A\ } \mathscr{E} \Big)$$

où $\int_{\mathfrak{C}} P$ est la catégorie des objets de P : ses objets sont les couples (C,p), avec $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ et $p \in P(C)$, les morphismes $(C,p) \longrightarrow (C',p')$ sont les morphismes $u : C \longrightarrow C'$ de $\mathfrak{C}$ tels que $p' = u^*p$. Cette limite existe, car elle est petite. Remarquons maintenant que $\mathrm{Hom}\big(P, \mathrm{Hom}(A\cdot,E)\big)$ peut s'écrire

$$\left\{ \{\tau_C : P(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(AC,E)\}_{C\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} \quad \text{tels que} \right.$$

$$\left. \forall u : C' \longrightarrow C \quad \begin{tikzcd} PC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Pu"'] & \mathrm{Hom}(AC,E) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Au,E)"] \\ PC' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & \mathrm{Hom}(AC',E) \end{tikzcd} \right\}$$

$$= \left\{ \{\tau_C(p) : AC \longrightarrow E\}_{\substack{C\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \\ p\in PC}} \ : \ \forall u : C' \longrightarrow C \quad \begin{tikzcd} AC \arrow[dr, "\tau_C(p)"] \arrow[d, "Au"'] & \\ AC' \arrow[r, "\tau_{C'}(u^*p)"'] & E \end{tikzcd} \right\}$$

$$= \left\{ \{\tau_C(p) : AC \longrightarrow E\}_{\substack{C\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \\ p\in PC}} \ : \ \forall u : C' \longrightarrow C \quad \begin{tikzcd} A\pi(C,p) \arrow[dr, "\tau_C(p)"] \arrow[d, "Au"'] & \\ A\pi(C',u^*p) \arrow[r, "\tau_{C'}(p)"'] & E \end{tikzcd} \right\}$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(P\otimes A, E).$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque. — On peut voir le foncteur $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathscr{E}$ comme un $\mathfrak{C}$-module à gauche et un préfaisceau $= P : \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ comme un $\mathfrak{C}$-module à droite. Cette analogie explique les notations suivantes. Soit $f : D \longrightarrow C$ une flèche de $\mathfrak{C}$. Si A est un $\mathfrak{C}$-module à gauche et $a \in A(D)$, on notera $f \cdot a = A(f)(a)$. De même, si P est un $\mathfrak{C}$-module à droite et $p \in P(C)$, on notera $p \cdot f = P(f)(p)$.

Définition. — *Un foncteur $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est* **plat** *si le foncteur $\cdot \otimes A$ est exact à gauche.*

Remarque. — De manière générale, on peut exprimer une limite inductive comme le conoyau d'une certaine double flèche, construite à l'aide de sommes disjointes. Dans le cas où $\mathscr{E} = \mathfrak{Ens}$, cela nous donne une définition de $P \otimes A$ comme le quotient de

$$\coprod_{C \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{C}} P(C) \times A(C)$$

par la relation d'équivalence *engendrée* par la relation $(pu,a') \sim (p,ua')$ où $u : C' \longrightarrow C$, $p \in P(C)$, $a \in A(C)$ et $a' \in A(C')$.

Pour pouvoir utiliser ces résultats, il va falloir

- Trouver un critère permettant de reconnaître les foncteurs A pour lesquels le produit tensoriel $\cdot \otimes A$ est exact ;
- Généraliser cela en remplaçant le topos des préfaisceaux $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ par un topos de faisceaux $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$.

Nous considèrerons tout d'abord le cas où $\mathscr{E} = \mathfrak{Ens}$, *i.e.*, nous nous intéresserons aux *points* d'un topos de préfaisceaux $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ puis de faisceaux $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$.

4 Points sur un topos de préfaisceaux

Nous allons maintenant appliquer la construction précédente pour obtenir des points sur un topos de préfaisceaux.

Proposition. —

(*i*) *Un foncteur fibre $f^* : \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est entièrement déterminé par sa restriction aux préfaisceaux représentables,*

$$A : \mathfrak{C} \xrightarrow{\;y\;} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \xrightarrow{\;A\;} \mathfrak{Ens}.$$

(*ii*) *On a alors un isomorphisme de foncteurs $\cdot \otimes A \simeq f^*$.*

(*iii*) *Réciproquement, si* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ *est un foncteur plat, alors* $\cdot \otimes A$ *est un foncteur fibre.*

Démonstration : (i) La première assertion résulte du fait qu'un préfaisceau est limite inductive de préfaisceaux représentables et que f^*, en tant qu'adjoint à gauche, commute aux limites inductives.

(iii) Le dernier point est vrai par définition d'un foncteur plat.

(ii) Comme les deux foncteurs f^* et $\cdot \otimes A$ commuttent aux limites inductives, il suffit de vérifier que leurs restrictions aux préfaisceaux représentables sont isomorphes. Soit donc C un objet de $\mathfrak{C}$ et Q un ensemble. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(C \otimes A,Q) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}}(C, \mathrm{Hom}(A,Q)) && \text{par définition de } \cdot \otimes A \\
&\simeq \mathrm{Hom}(A,Q)(C) && \text{par le lemme d'Yoneda} \\
&= \mathrm{Hom}(A(C),Q) && \text{par définition.}
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Corollaire. — *On a une équivalence entre la catégorie des morphismes de topos* $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ *et la catégorie des foncteurs plats* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$*.*

5 Foncteurs plats

Nous allons maintenant établir un critère permettant de reconnaître les foncteurs plats.

Définition. — *On dit qu'une catégorie* I *est* **filtrante** *si*

(i) $I \neq \varnothing$ *;*

(ii) *Pour tous objets* $i,j \in I$*, il existe un diagramme*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & i \\
k \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & j;
\end{tikzcd}$$

(iii) *Pour toutes flèches* $i \rightrightarrows j$ *dans* I*, il existe un morphisme* $k \longrightarrow i$ *qui les égalise.*

Définition. — *Un foncteur* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ *est* **filtrant** *si la catégorie, notée* $\int_{\mathfrak{C}} A$*, dont les objets sont les couples* (C,a) *où* $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ *et* $a \in A(C)$ *et dont les morphismes* $(C,a) \longrightarrow (C',a')$ *sont les morphismes* $u : C \longrightarrow C'$ *tels que* $u(a) = a'$ *est filtrante.*

Remarque. — Un foncteur $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est donc filtrant si

(i) Il existe un objet $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ tel que $A(C) \neq \varnothing$;

(ii) Pour tous objets $C,C' \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, pour tout $a \in A(C)$ et tout $a' \in A(C')$, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \\ B \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & \\ & C' \end{tikzcd}$$

dans $\mathfrak{C}$ et un $b \in A(B)$ tel que $a = u(b)$ et $a' = u'(b)$.

(iii) Pour toutes flèches $u,v : C \longrightarrow D$ dans $\mathfrak{C}$ et tout $a \in A(C)$ tel que $u(a) = v(a)$, il existe un morphisme $B \longrightarrow C$ dans $\mathfrak{C}$ égalisant u et v et un $b \in A(B)$ tel que $w(b) = a$.

Théorème. — ***Un foncteur*** $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ ***est plat si et seulement s'il est filtrant.***

Démonstration : 1. Supposons le foncteur A plat, *i.e.*, le foncteur $\cdot \otimes A$ exact à gauche, et montrons que le foncteur A est filtrant.

(i) Comme le foncteur $\cdot \otimes A$ préserve l'objet final, on a $1 \otimes A = *$, donc (d'après la description explicite du produit tensoriel) le foncteur A est non vide.

(ii) Soient C et D des objets de $\mathfrak{C}$. Comme le foncteur $\cdot \otimes A$ préserve les produits, on a en particulier

$$(yC \times yD) \otimes A \simeq (yC \otimes A) \times (yD \otimes A).$$

Or, on a déjà vu que la restriction de $\cdot \otimes A$ aux préfaisceaux représentables n'était autre que le foncteur A lui-même, on a donc une bijection

$$(yC \times yD) \otimes A \simeq A(C) \times A(D)$$

donc une surjection

$$\coprod_{B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} \mathrm{Hom}(B,C) \times \mathrm{Hom}(B,D) \times A(B) \twoheadrightarrow A(C) \times A(D).$$

La condition (ii) de la définition d'un foncteur fibrant est donc vérifiée.

(iii) Soient $u,v : C \longrightarrow D$ des morphismes de $\mathfrak{C}$ et $a \in A(C)$ tel que $u(a) = v(a)$. Comme le foncteur $\cdot \otimes A$ préserve les noyaux de double flèche,

$$P = \mathrm{Ker}(yu,yv) \longrightarrow yC \underset{yv}{\overset{yu}{\rightrightarrows}} yD$$

est transformé en

$$P \otimes A = \mathrm{Ker}(Au,Av) \longrightarrow AC \overset{Au}{\underset{Av}{\rightrightarrows}} AD.$$

Donc l'élément $a \in A(C)$ provient d'un élément $[w,b]$ de $P \otimes A$, *i.e.*, il existe $w : B \longrightarrow C$ tel que $uw = vw$ et $b \in A(B)$ tel que $a = w(b)$.

2. Supposons maintenant que le fonteur A est filtrant et montrons que le foncteur $\cdot \otimes A$ est exact à gauche.

Commençons par remarquer que, puisque A est filtrant, on peut décrire la relation d'équivalence définissant $P \otimes A$ de la manière suivante : $(r,a) \sim (r',a')$ (où $a \in A(C)$, $r \in P(C)$, $a' \in C(C')$ et $r' \in P(C')$) si et seulement s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \\ D \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \\ & C' \end{tikzcd}$$

dans $\mathfrak{C}$ et $b \in A(D)$ tel que $u(b) = a$, $v(b) = a'$ et $u^*r = v^*r'$. C'est bien une relation d'équivalence.

Montrons maintenant que le foncteur $\cdot \otimes A$ préservce l'objet final. Tout d'abord, $1 \otimes A$ est non vide car A est non vide. Ensuite, d'après la propriété (ii) et la description de la relation d'équivalence ci-dessus, deux éléments quelconques de $1 \otimes A$ sont équivalents : $1 \otimes A$ est bien réduit à un élément.

Il reste à voir que le foncteur $\cdot \otimes A$ préserve les produits fibrés. Soit donc

$$\begin{tikzcd} R \times_P Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Q \arrow[d, "\varphi"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & P \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de préfaisceaux. L'application

$$\alpha : \begin{cases} (R \underset{P}{\times} Q) \otimes A & \longrightarrow & (R \otimes A) \underset{P \otimes A}{\times} (Q \otimes A) \\ [(r,q),a] & \longmapsto & ([r,a],[q,a]) \end{cases}$$

est bien définie et nous devons montrer qu'elle est bijective.

Montrons qu'elle est surjective. Soient

$$r \in R(D), \qquad a \in A(D), \qquad q \in Q(C), \qquad a' \in A(C)$$

tels que $(\psi(r),a) \sim (\varphi(q),a')$ dans $P \otimes A$. Comme A est filtrant, on utilise la description de la relation déquivalence mentionnée plus haut : il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \\ B \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \\ & D \end{tikzcd}$$

dans $\mathfrak{C}$ et $b \in A(B)$ tels que $\varphi(q)u = \psi(r)v$, $u(b) = a'$ et $v(b) = a$. On a alors $\varphi(qu) = \psi(rv)$ si bien que $(rv,qu) \in (R \times_P Q)(B)$. Calculons:

$$\begin{aligned}\alpha(rv,qu,b) &= ([rv,b],[qu,b]) \\ &\sim ([r,vb],[q,ub]) \\ &= ([r,a],[q,a']).\end{aligned}$$

on vient de montrer que α était surjective.

Montrons maintenant que α est injective. Supposons que $\alpha(r_1,q_1,a_1) \sim \alpha(r_2,q_2,a_2)$ où

$$r_1 \in R(C_1), \qquad q_1 \in Q(C_1), \qquad a_1 \in A(C_1),$$

$$r_2 \in R(C_2), \qquad q_2 \in Q(C_2), \qquad a_2 \in A(C_2).$$

Cela signifie que l'on a $(r_1,a_1) \sim (r_2,a_2)$ et $(q_1,a_1) \sim (q_2,a_2)$. D'après la description de la relation d'équivalence, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & C_1 \\ B \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

dans $\mathfrak{C}$ et $b \in A(B)$ tel que

$$q_1u_1 = q_2u_2, \qquad u_1b = a_1, \qquad u_2b = a_2$$

et un diagramme

$$\begin{tikzcd} & C_1 \\ D \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

dans $\mathfrak{C}$ et $d \in A(D)$ tel que

$$r_1v_1 = r_2v_2, \qquad v_1d = a_1, \qquad v_2d = a_2.$$

Comme le foncteur A est filtrant, il existe (K,c) dans $\int_{\mathfrak{C}} A$ tel que les composés $(K,c) \longrightarrow (C_1,a_1)$ soient égaux et que les composés $(K,c) \longrightarrow (C_2,a_2)$ soient égaux.

$$\begin{tikzcd} & (D,d) \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ (K,c) \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & (C_1,a_1) & (C_2,a_2) \\ & (B,b) \arrow[ur] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

i.e., il existe un objet K de $\mathfrak{C}$, un élément $c \in A(K)$, des morphisme $w : K \longrightarrow D$ et $s : K \longrightarrow B$ tels que

$$v_1 w = u_1 s, \qquad v_2 w = u_2 s, \qquad wc = d, \qquad sc = b.$$

Cela montre que $(r_1,q_1,a_1) \sim (r_2,q_2,a_2)$. □

Corollaire. — *Soit $\mathfrak{C}$ une petite catégorie avec des limites projectives finies. Un foncteur $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est plat si et seulement si le foncteur A est exact à gauche.*

Démonstration : Supposons le foncteur A plat. Comme il est isomorphe au composé

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{y} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \xrightarrow{\cdot \otimes A} \mathfrak{Ens}$$

et comme le plongement d'Yoneda préserve les limites projectives, on en déduit que ce composé, donc A, préserve les limites projectives finies.

La réciproque est générale : un foncteur exact à gauche (si la catégorie de départ possède des limites projectives finies) est filtrant. □

6 Points sur un topos

Nous allons maintenant rajouter une topologie (de Lawvere–Tierney) sur notre topos de préfaisceaux $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ pour construire similairement les points sur un topos.

Proposition. — *Soit $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ un morphisme de topos et j une topologie de Lawvere–Tierney sur $\mathscr{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f se factorise par $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j)$;*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & \mathscr{E} \\ & \mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(ii) *l'image directe d'un objet de $\mathscr{F}$ par f est un faisceau ;*

(iii) *f^* envoie les inclusions denses de $\mathscr{E}$ sur des isomorphismes de $\mathscr{F}$.*

Démonstration : $(i) \implies (ii)$ Si $f_* \simeq i_* g_*$, alors les $f_* F$ sont dans l'image essentielle de i_*, ce sont donc des faisceaux.

$(ii) \iff (iii)$ Soit $u : A \rightarrowtail E$ un sous-objet dense dans $\mathscr{E}$. L'adjonction $f^* \dashv f_*$ peut s'écrire

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(f^*E,F) \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f^*u,F)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(E,f_*F) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u,f_*F)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(f^*A,F) \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(A,f_*F).
\end{tikzcd}$$

Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

(a) f_*F est un faisceau ;

(b) la flèche de droite est un isomorphisme pour tout A ;

(c) la flèche de gauche $\mathrm{Hom}(f^*u,F)$ est un isomorphisme pour tout A ;

(d) f^*u est un isomorphisme pour tout A.

$(ii) \implies (i)$ On construit explicitement g en posant $g_* = i^*f_*$. On a bien $i_*g_* = i_*i^*f_* \simeq f_*$ car i_*i^* est le foncteur faisceau associé et l'image d'un objet par f_* est déjà un faisceau. Vérifions maintenant que $g^* = f^*i_*$, qui est exact à gauche, est bien l'adjoint à gauche de g_* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(g^*E,F) &\simeq \mathrm{Hom}(f^*i_*E,F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(i_*E,f_*F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(i_*E,i_*i^*f_*F) && \text{car } F \text{ est un faisceau} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(E,i^*f_*F) && \text{car } i_* \text{ est pleinement fidèle} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(E,g_*F).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Lemme. — *Soit* $f : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ *un point. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f *se factorise par* $i : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J) \longrightarrow \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$;

(ii) *le composé*

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{y} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \xrightarrow{f^*} \mathfrak{Ens}$$

envoie les cribles couvrants sur des familles épimorphiques.

Démonstration : $(i) \implies (ii)$ Soit $S \in J(C)$, *i.e.*, $S \rightarrowtail yC$ un sous-objet dense. D'après la proposition précédente, $f^*S \longrightarrow f^*yC$ est un isomorphisme. Or, le préfaisceau S est limite inductive de préfaisceaux représentables, le morphisme

$$\varinjlim_{(D\to C)\in S} f^*yD \longrightarrow f^*yC$$

est un isomorphisme, donc la famille des $f^*y(D \to C)$ où $(D \to C) \in S$ est surjective.

$(ii) \implies (i)$ Supposons maintenant que f^*y transforme les cribles couvrants en familles épimorphiques et montrons que f^* transforme les inclusions denses en isomorphismes. Soit donc $B \subset P$ une inclusion dense, où le préfaisceau P peut s'écrire $P = \varinjlim yC_i$. Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & yC_i \arrow[d] \\ B \arrow[r, tail] & P. \end{tikzcd}$$

On a $B \simeq \varinjlim B_i$ (car, dans un topos, les petites limites inductives comuttent aux produits fibrés) et les inclusions $B_i \rightarrowtail yC_i$ sont denses (car les inclusions denses sont stables par produit fibré). La famille des f^*yu, où $u \in B_i$, est surjective,

$$\begin{tikzcd} f^*B_i \arrow[r] & f^*yC_i \\ f^*yD \arrow[u] \arrow[ur, "f^*yu"'] & \end{tikzcd}$$

donc le morphisme $f^*B_i \to f^*yC_i$ est surjectif. Comme c'est aussi un monomorphisme, c'est un isomorphisme. En prenant les limites inductives, il vient

$$\varinjlim f^*B_i \simeq \varinjlim f^*yC_i,$$

mais comme le foncteur f^* commute aux limites inductives,

$$f^* \varinjlim B_i \simeq f^* \varinjlim yC_i,$$

i.e., $f^*B \simeq f^*P$. □

Définition. — *Soit* $(\mathfrak{C}, J)$ *un petit site. On dit qu'un foncteur* $A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ens}$ *est* **continu** *s'il envoie les cribles couvrants sur les familles épimorphiques.*

Corollaire. — *On a une équivalence de catégories entre la catégorie des points du topos* $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C}, J)$ *et la catégorie des foncteurs plats (ou filtrants) et continus* $A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ens}$.

Corollaire. — *Soit* $(\mathfrak{C}, J)$ *un petit site avec des limites projectives finies. On a une équivalence de catégories entre la catégorie des points du topos* $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C}, J)$ *et la catégorie des foncteurs continus exacts à gauche* $A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ens}$.

7 Morphismes de topos

Nous allons maintenant généraliser les résultats précédents concernant les morphismes de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ pour construire des morphismes de topos $\mathscr{E} \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$, où $\mathscr{E}$ est un topos quelconque. Les constructions étant les mêmes, nous nous contenterons de donner les définitions et les résultats, sans démonstration.

Définition. — *Un foncteur* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathscr{E}$ *est* **filtrant** *si*

(*i*) *La famille* $(A(C) \longrightarrow 1)_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}}$ *est épimorphique ;*

(*ii*) *Pour tous objets* C, D *de* $\mathfrak{C}$, *la famille des* $A(B) \longrightarrow A(C) \times A(D)$, *indexée par les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & C \\ B \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \\ & D \end{tikzcd}$$

est épimorphique ;

(*iii*) *Pour tous morphismes* $u,v : C \longrightarrow D$ *dans* $\mathfrak{C}$, *la famille des* $A(B) \longrightarrow \mathrm{Ker}(Au,Av)$ *indexée par les* $w : B \longrightarrow C$ *tels que* $uw = vw$ *est épimorphique.*

Remarque. — On peut alors reprendre toutes les démonstrations précédentes en remplaçant la catégorie des ensembles par le topos $\mathscr{E}$ et en remplaçant les éléments des objets de $\mathfrak{Ens}$ par des éléments généralisés. Rappelons qu'un **élément généralisé** d'un objet X d'une catégorie $\mathfrak{C}$ défini sur U est un morphisme $U \longrightarrow X$, *i.e.*, un élément de $\mathrm{Hom}(U,X) = (yX)(U)$: cela revient à remplacer les objets d'une catégorie par des préfaisceaux représentables. Les démonstrations sont les mêmes, mais elles deviennent beaucoup plus techniques : nous ne les ferons pas.

Théorème. — ***Soit*** $\mathscr{E}$ ***un topos et*** $\mathfrak{C}$ ***une petite catégorie, un foncteur*** $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathscr{E}$ ***est plat si et seulement s'il est filtrant.***

Corollaire. — *Soit* $(\mathfrak{C},J)$ *un petit site avec des limites projectives finies et* $\mathscr{E}$ *un topos. On a une équivalence entre la catégorie des morphismes de topos* $\mathscr{E} \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ *et la catégorie des foncteurs continus exacts à gauche* $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathscr{E}$.

C'est à partir de ce résultat que nous allons établir des « recettes » pour construire des morphismes de topos $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ à partir de foncteurs $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ vérifiant certaines prorpiétés.

8 Corollaires

Rappel. — Soit $(\mathfrak{C},J)$ un petit site. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \longrightarrow G$ est un **épimorphisme local** si

$$\forall C \in \operatorname{Ob}\mathfrak{C} \quad \forall y \in G(C) \quad \exists S \in J(C) \quad \forall (f : D \longrightarrow C) \in S \quad f^*y \in \operatorname{Im}\varphi_D.$$

Le morphisme φ est un épimorphisme local si et seulement si le morphisme $a\varphi$ est un épimorphisme dans $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$.

Définition. — *Un foncteur* $\varphi : (\mathfrak{C},J) \longrightarrow (\mathfrak{D},K)$ *entre petits sites possédants des limites projectives finies est* **continu** *si*

(i) *il préserve les limites projectives finies ;*

(ii) *il* **préserve les cribles**, i.e., *le crible engendré par l'image d'un crible couvrant est encore couvrant,*

$$\forall C \in \operatorname{Ob}\mathfrak{C} \quad \forall R \in J(C) \quad \langle \varphi(R) \rangle \in K(\varphi C).$$

Théorème. — ***Soient*** $(\mathfrak{C},J)$ ***et*** $(\mathfrak{D},K)$ ***des petits sites avec des limites projectives finies. Un foncteur continu*** $\varphi : (\mathfrak{C},J) \longrightarrow (\mathfrak{D},K)$ ***définit un morphisme géométrique*** $f : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ ***avec*** $f^* = \cdot \otimes (a \circ y \circ \varphi)$ ***et*** $f_* = \cdot \circ \varphi$***.***

Démonstration : Nous allons montrer que le foncteur $A = a \circ y \circ \varphi$ est plat et continu. Tout d'abord, comme il est exact à gauche, il est bien plat. Comme on sait que φ préserve les cribles couvrants, il va suffire de voir que $a \circ y$ transforme les cribles couvrants en familles épimorphiques.

On termine la preuve en remarquant que ces assertions sont équivalentes.

(a) La famille $(f_i : C_i \longrightarrow C)_i$ est couvrante ;
(b) Le morphisme $\coprod yC_i \longrightarrow yC$ est un épimorphisme local ;
(c) Le morphisme $a \coprod yC_i \longrightarrow ayC$ est un épimorphisme ;
(d) Le morphisme $\coprod ayC_i \longrightarrow ayC$ est un épimorphisme. $\square$

Définition. — *Un foncteur entre sites* $\pi : (\mathfrak{D},K) \longrightarrow (\mathfrak{C},J)$ *est* **cocontinu** *(ou possède la* **propriété de relèvement des cribles***) si tout crible couvrant* S *de l'image* πD *d'un objet* D *est rafiné par l'image* πR *d'un crible* R *couvrant* D*,* i.e.,

$$\forall D \in \operatorname{Ob}\mathfrak{D} \quad \forall S \in J(\pi D) \quad \exists R \in K(D) \quad \pi(R) \subset S.$$

Théorème. — ***Soit*** $\pi : (\mathfrak{D},K) \longrightarrow (\mathfrak{C},J)$ ***un foncteur cocontinu. Le foncteur***

$$A : \begin{cases} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K) \\ C & \longmapsto & a\,\mathrm{Hom}\big(\pi(\cdot),C\big) \end{cases}$$

est plat et continu ; il définit donc un morphisme de topos $f : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ ***avec*** $f^* = a(\cdot \circ \pi)$***.***

Démonstration : Commençons par montrer que le foncteur A est continu, *i.e.*, que l'image d'un crible couvrant par A est une famille épimorphique. Soit donc $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ et $S \in J(C)$. On veut vérifier que le morphisme de faisceaux $a\psi$ est un épimorphisme, où

$$\psi : \coprod_{(u:C' \to C) \in S} \mathrm{Hom}\big(\pi(\cdot),C'\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\pi(\cdot),C\big).$$

Pour cela, il va suffire d'établir que le morphisme de préfaisceaux ψ est un épimorphisme local. Soit donc $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$ et $g \in \mathrm{Hom}(\pi D,C)$; on cherche un crible de D qui vérifie certaines propriétés. Mais comme $g^*S \in J(\pi D)$ et comme π possède la propriété de relèvement des cribles, il existe un crible $R \in K(D)$ tel que $\pi R \subset g^*S$. Assurons-nous maintenant que ce crible R vérifie la propriété attendue : pour tout $(v : D' \longrightarrow D) \in R$, l'élément $v^*g = g \circ \pi(v)$ est dans l'image de

$$\psi_{D'} : \coprod_{(u:C' \to C) \in S} \mathrm{Hom}(\pi D',C') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi D',C).$$

C'est vrai car on sait qu'il existe $u \in S$ tel que

$$\begin{tikzcd} \pi D' \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\pi(v)"'] & C' \arrow[d, "u"] \\ \pi(D) \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

car $\pi R \subset g^*S$.

Il nous reste maintenant à montrer que le foncteur A est plat, *i.e.*, que le foncteur $\cdot \otimes A : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K)$ est exact à gauche. Pour cela, nous allons vérifier que le foncteur $\cdot \otimes A$ est isomorphe à un composé de foncteurs exacts à gauche. Soit F un faisceau sur $\mathfrak{C}$. On a

$$\begin{aligned} F \otimes A &= F \otimes a\,\mathrm{Hom}\big(\pi(\cdot),\cdot\big) \\ &= a\Big(F \otimes \mathrm{Hom}\big(\pi(\cdot),\cdot\big)\Big), \end{aligned}$$

car les foncteurs a et $\cdot \otimes A$ sont tous deux définis comme des adjoints à gauche, *i.e.*, comme certaines limites inductives : on peut donc les intervertir. Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}\Big(F \otimes \operatorname{Hom}\big(\pi(\cdot),\cdot\big)\Big)(D) &= F \otimes \operatorname{Hom}(\pi D,\cdot) \\ &\simeq F(\pi D).\end{aligned}$$

la première égalité résulte du fait que le préfaisceau produit tensoriel est défini comme une certaine limite inductive, qui se calcule argument par argument ; la seconde résulte de la description explicite de ce produit tensoriel. Finalement, le foncteur $\cdot \otimes A$ est isomorphe au composé

$$\mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J) \xhookrightarrow{i} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \xrightarrow{\pi^*} \mathfrak{D}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \xrightarrow{a} \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K)$$

et tous ces foncteurs sont exacts à gauche. $\square$

Exemple. — Un foncteur $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ définit un morphisme de topos de préfaisceaux,

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{D}^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}.$$

Localisation booléenne

Vincent Zoonekynd
d'après MacLane–Moerdijk

26 avril 2000

Les topos généralisent les propriétés les plus élémentaire de la catégorie des ensembles, mais ils ne vérifient pas nécessairement des propriétés plus particulières, comme l'axiome du choix (qui peut s'exprimer ainsi : les épimorphismes sont scindés).

Les topos généralisent aussi les propriétés des catégories de faisceaux sur un espace topologique. Ces catégories ont une propriété très agréable : pour vérifier qu'un morphisme de faisceaux est un isomorphisme, un monomorphisme ou un épimorphisme (ou, de manière plus générale, qu'une certaine suite est exacte), il suffit de le faire sur les fibres — on est alors ramené à des considérations purement ensemblistes. Mais dans un topos quelconque, il n'y a pas nécessairement de point ; et s'il y en a, il n'y en a généralement pas « suffisemment » pour que le même résultat soit valable.

Le résultat que nous allons voir maintenant permettra de pallier à ces défauts et de se ramener (pour montrer qu'un morphisme est un isomorphisme, un épimorphisme, un monomorphisme ou pour montrer qu'une suite est exacte) à des considérations presque ensemblistes : on se ramènera à un topos dans leque l'axiome du choix est vérifié.

9 Morphismes ouverts

Définition. — *Un morphisme de topos $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ est* **ouvert** *si et seulement si pour tout objet E de $\mathscr{E}$ le morphisme d'ensembles ordonnés*

$$f_E^* : \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}\, E \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathscr{F}}\, f^*E$$

possède un adjoint à gauche $(f_E)_!$, fonctoriel au sens suivant.

$$\begin{tikzcd} E & \mathrm{Sub}_{\mathscr{F}} f^*E \arrow[r, "(f_E)_!"] \arrow[d, "f^*(\alpha^{-1})"'] & \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}} E \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\ E' \arrow[u, "\alpha"] & \mathrm{Sub}_{\mathscr{F}} f^*E' \arrow[r, "(f_{E'})_!"'] & \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}} E' \end{tikzcd}$$

Définition. — *Un morphisme de topos f est* **surjectif** *si son foncteur « image réciproque » f^* est fidèle.*

Théorème. — ***Soit** $\pi : (\mathfrak{D},K) \longrightarrow (\mathfrak{C},J)$ **un foncteur entre petits sites tel que***

(i)** π **est cocontinu,** **i.e.**, **possède la propriété de relèvement des cribles ;

(ii)** π **préserve les cribles ;

(iii)** **Pour tout objet** D **de** $\mathfrak{D}$**, le foncteur

$$\pi/D : \mathfrak{D}/D \longrightarrow \mathfrak{C}/\pi D$$

est surjectif sur les objets.

Alors, le morphisme de topos** $f : \mathfrak{Sh}(\mathfrak{D},K) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ **qu'il induit est ouvert. Si de plus

(iv)** π **est surjectif sur les objets

alors le morphisme** f **est surjectif,** **i.e.**, **son foncteur image réciproque** f^* **est fidèle.

Démonstration : 1. Description de $\mathrm{Sub}\, f^*E$. On sait que $f^*E = a(E \circ \pi)$. Or, le foncteur « faisceau associé » a peut se décrire facilement à l'aide de sous-préfaisceaux fermés : on sait que

$$\mathrm{ClSubPr}\, E \circ \pi \simeq \mathrm{SubSh}\, f^*E.$$

Rappelons comment décrire cette opération de fermeture. Soit P un préfaisceau sur $\mathfrak{D}$, $d \in P(D)$ et $A \subset P$ un sous-préfaisceau. Notons

$$S_{d,A} = \{\, g : D' \longrightarrow D \mid g^*d \in A(D') \,\}.$$

C'est un crible. Le sous préfaisceau $A \subset P$ est fermé si et seulement si

$$\forall D \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{D} \quad \forall d \in P(D) \quad S_{d,A} \in K(D) \implies d \in A(D).$$

2. On peut décrire $f_E^* : \mathrm{SubSh}\, E \longrightarrow \mathrm{SubSh}\, f^*E$ de la manière suivante.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{SubSh}\, E \arrow[dl, "\cdot\circ\pi"'] \arrow[dr, "f_E^*"] & \\ \mathrm{ClSubPr}(E\circ\pi) \arrow[rr, equal, "a"'] & & \mathrm{SubSh}\, f^*E \end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que si $B \in \mathrm{SubSh}\, E$ alors $B \circ \pi$ est un sous-préfaisceau *fermé* de $E \circ \pi$. Soit donc $D \in \mathfrak{D}$ et $d \in (E\circ\pi)(D)$ tels que $S_{d,B\circ\pi} \in K(D)$. Comme π préserve les cribles, le crible engendré par $\pi S_{d,B\circ\pi}$ couvre πD. Mais comme $S_{d,B} = \{\, h : C' \longrightarrow \pi D \mid h^*d \in B(C')\,\}$ contient $\pi S_{d,B\circ\pi}$, on en déduit que $S_{d,B}$ couvre πD. Mais B est un sous-faisceau, donc un sous-préfaisceau fermé, donc $d \in B(\pi D)$.

3. On cherche maintenant à construire un adjoint à gauche de

$$\begin{cases} \mathrm{SubSh}\, E & \longrightarrow & \mathrm{ClSubPr}\, E\circ\pi \\ B & \longmapsto & B\circ\pi. \end{cases}$$

Soit $Q \in \mathrm{ClSubPr}\, E\circ\pi$. Pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ et $e \in E(C)$, on note

$$T_{e,Q} = \text{crible engendré par les } h : \pi(D) \longrightarrow C \text{ tels que } h^*e \in Q(D).$$

On définit alors $\widetilde{Q}(C) \subset E(C)$ par

$$e \in \widetilde{Q}(C) \iff T_{e,Q} \in J(C).$$

4. Montrons que $\widetilde{Q}$ est un sous-préfaisceau de E. Soit $u : C' \longrightarrow C$ un morphisme de $\mathfrak{C}$, on veut montrer que l'image de $\widetilde{Q}(C)$ par $E(u)$ est contenue dans $\widetilde{Q}(C')$.

$$\begin{tikzcd} EC \arrow[r, "Eu"] & EC' \\ \widetilde{Q}C \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted] & \widetilde{Q}C' \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Soit donc $e \in \widetilde{Q}(C)$, *i.e.*, $e \in E(C)$ tel que $T_{e,Q} \in J(C)$; on veut montrer que $u(e) \in \widetilde{Q}(C')$, *i.e.*, que $T_{u(e),Q} \in J(C')$. On sait déjà que

$$\begin{aligned} u^*T_{e,Q} &= \{\, C'' \longrightarrow C' \;:\; (C'' \longrightarrow C' \longrightarrow C) \in T_{e,Q} \,\} \in J(C') \\ &= \left\{ h : C'' \longrightarrow C' \mid \text{ il existe } \begin{tikzcd} C'' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "k"'] & \pi D \arrow[d, "h"] \\ C' \arrow[r, "u"'] & C \end{tikzcd} \text{ et } h^*e \in Q(D) \right\} \end{aligned}$$

Mais comme $\pi/D : \mathfrak{D}/D \longrightarrow \mathfrak{C}/\pi D$ est surjective sur les objets, le morphisme $v : C'' \longrightarrow \pi D$ provient d'un $w : D' \longrightarrow D$, avec $C'' = \pi D'$. On a donc

$$u^* T_{e,Q} \subset \{\, k : C'' \longrightarrow C' \mid k^* u^* e \in Q(D') \,\},$$

i.e., $u^* T_{e,Q} \subset T_{u^* e,Q}$

5. Montrons que $\widetilde{Q}$ est un sous-préfaisceau fermé, *i.e.*, montrons que pour tout objet $C \in \operatorname{Ob} \mathfrak{C}$ et tout $e \in E(C)$,

$$S_{e,\widetilde{Q}} = \{\, u : C' \longrightarrow C \mid u^* e \in \widetilde{Q}(C') \,\} \in J(C) \implies e \in \widetilde{Q}(C),$$

i.e., montrons que

$$S_{e,\widetilde{Q}} = \{\, u : C' \longrightarrow C \mid T_{u^* e,Q} \in J(C) \,\} \in J(C) \implies T_{e,Q} \in J(C).$$

Supposons donc $S_{e,\widetilde{Q}} \in J(C)$. Pour montrer que $T_{e,Q}$ est lui aussi couvrant, il va suffire de voir que

$$\forall (u : C' \longrightarrow C) \in S_{e,\widetilde{Q}} \qquad u^* T_{e,Q} \in J(C'),$$

i.e., que

$$\forall (u : C' \longrightarrow C) \quad T_{u^* e,Q} \in J(C) \implies u^* T_{e,Q} \in J(C').$$

Pour cela, montrons que $T_{u^* e,Q} \subset u^* T_{e,Q}$.

$$\begin{aligned} T_{u^* e,Q} &= \big\langle\, h : \pi D \longrightarrow C' \mid h^*(u^* e) \in Q(D) \,\big\rangle \\ &= \big\langle\, h : \pi D \longrightarrow C' \mid (uh)^*(e) \in Q(D) \,\big\rangle \\ &\subset u^* \big\langle\, k : \pi D \longrightarrow C \mid k^* e \in Q(D) \,\big\rangle \\ &= u^* T_{e,Q}. \end{aligned}$$

6. Montrons maintenant que le foncteur $Q \longmapsto \widetilde{Q}$ est bien l'adjoint recherché.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, mapsto] & \mathrm{ClSubPr}(E \circ \pi) \arrow[d, shift right, "(f_E)_!"'] & B \circ \pi \\ \widetilde{Q} & \mathrm{SubSh}\, E \arrow[u, shift right, "f_E^*"'] & B \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Pour cela, nous allons d'abord établir que $\widetilde{B \circ \pi} \subset B$ puis que $Q \subset \widetilde{Q} \circ \pi$: comme il s'agit d'ensembles ordonnés, cela suffira pour montrer l'adjonction.

Soit $e \in \widetilde{B \circ \pi}(C)$, *i.e.*, $e \in B \circ \pi(C)$ tel que $T_{e,B\circ\pi} \in J(C)$. Rappelons que

$$\begin{aligned} T_{e,B\circ\pi} &= \big\langle\, h : \pi D \longrightarrow C \mid h^* e \in B(\pi D) \,\big\rangle \\ S_{e,B} &= \{\, g : C' \longrightarrow C \mid g^* e \in B(C') \,\}. \end{aligned}$$

On a donc $T_{e,B\circ\pi} \subset S_{e,B}$. Mais comme B est un sous-faisceau, on a $B = \bar{B}$.

Soit maintenant Q un sous-préfaisceau fermé de $E \circ \pi$, $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$ et $e \in Q(D) \subset E(\pi D)$. On veut montrer que $e \in \widetilde{Q}(\pi D)$, *i.e.*, que $T_{e,Q} \in J(\pi D)$. On a

$$T_{e,Q} = \big\langle\, h : \pi D' \longrightarrow \pi D \mid h^* e \in Q(D') \,\big\rangle,$$

mais comme $\mathrm{Id}_{\pi D} \in T_{e,Q}$, c'est le crible maximal, il est donc couvrant.

7. La fonctorialité de cet adjoint signifie que la construction $Q \longmapsto \widetilde{Q}$ commute aux produits fibrés et résulte de la définition de $\widetilde{Q}$.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[r, mapsto] & \widetilde{Q} \\
E & \mathrm{ClSubPr}\, E \circ \pi \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{-1}\circ\pi"'] & \mathrm{SubSh}\, E \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
E' \arrow[u] & \mathrm{ClSubPr}\, E' \circ \pi \arrow[r] & \mathrm{SubSh}\, E'
\end{tikzcd}$$

8. La surjectivité résulte du lemme suivant. □

Lemme. — *Soit $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ un morphisme de topos. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Les $f_E^* : \mathrm{Sub}\, E \longrightarrow \mathrm{Sub}\, f^* E$ sont injectifs ;*

(ii) *Pour tout morphisme u de $\mathscr{E}$, si $f^* u$ est un isomorphisme, alors u en est un (on dit que le foncteur f^* est* **conservatif***) ;*

(iii) *f^* est fidèle.*

Démonstration : $(iii) \implies (i)$ Si $A \subset E$ est un sous-objet, il lui correspond un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "t"] \\
E \arrow[r, "\chi"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur image réciproque f^*, on en déduit un autre carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
f^* A \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & f^* 1 \simeq 1 \arrow[d, "f^* t"] \\
f^* E \arrow[r, "f^* \chi"'] & f^* \Omega.
\end{tikzcd}$$

Soient A et B des sous-objets de E tels que $f^* A = f^* B$ comme sous-objets de $f^* E$. On peut supposer que $A \subset B$ (sinon, on applique ce que l'on va démontrer à $A \subset A \vee B$ et $B \subset A \vee B$, car comme $f^*(A \vee B) = f^*A \vee f^*B$ et $f^*A = f^*B$, on a $f^*(A \vee B) = f^*A = f^*B$). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^*B \arrow[dr, equal, bend left] \arrow[drr, bend left, "f^*\lambda"] \arrow[ddr, bend right, "f^*u"'] & & \\
& f^*A \arrow[r] \arrow[d] & f^*1 \arrow[d, "f^*t"] \\
& f^*E \arrow[r, "f^*\chi"'] & f^*\Omega.
\end{tikzcd}$$

On a donc $f^*(\chi \circ u) = f^*(t \circ \lambda)$, donc $\chi \circ u = t \circ \lambda$, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "\lambda"] \arrow[ddr, tail, bend right, "u"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "t"] \\
& E \arrow[r, "\chi"'] & \Omega,
\end{tikzcd}$$

donc $B \subset A$, donc $A = B$.

$(i) \implies (ii)$ Soit $\alpha : E \longrightarrow E'$ un morphisme tel que $f^*\alpha$ soit un isomorphisme. Montrons tout d'abord que α est un épimorphisme. On peut le factoriser en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme,

$$E \twoheadrightarrow \operatorname{Im}\alpha \rightarrowtail E'.$$

Mais comme f^* est exact, il préserve les épimorphismes et les monomorphismes : on a donc une décomposition

$$f^*E \twoheadrightarrow f^* \operatorname{Im}\alpha \rightarrowtail f^*E'.$$

Comme $f^*\alpha$ est un isomorphisme, c'est en particulier un épimorphisme, donc $f^* \operatorname{Im}\alpha \rightarrowtail f^*E'$ en est aussi un. Comme c'était déjà un monomorphisme, c'est un isomorphisme : $f^* \operatorname{Im}\alpha = f^*E$ dans $\operatorname{Sub} f^*E$. Mais comme f^*_E est injectif, on a $\operatorname{Im}\alpha = E$ dans $\operatorname{Sub} E$. Le morphisme α est donc bien un épimorphisme.

Montrons maintenant que α est un monomorphisme. Soit Δ la diagonale de $E \times E$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, two heads] \arrow[rrrdd, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrddd, bend right, "\mathrm{Id}"'] & & & \\
& \Delta \arrow[dr, tail] & & \\
& & K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "\alpha"] \\
& & E \arrow[r, "\alpha"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Comme f^* préserve les produits fibrés, les monomorphismes et les épimorphismes, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[dr, two heads] \arrow[rrrdd, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrddd, bend right, "\mathrm{Id}"'] & & & \\
& f^*\Delta \arrow[dr, tail] & & \\
& & f^*K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & f^*E \arrow[d, "\alpha"] \\
& & f^*E \arrow[r, "\alpha"'] & f^*E'
\end{tikzcd}$$

Mais comme $f^*\alpha$ est un isomorphisme, on a $f^*\Delta = f^*K = f^*E$ dans $\operatorname{Sub} f^*E$. Or f^*_E est injectif, donc $\Delta = K$: cela nous dit que α est un monomorphisme.

$(ii) \implies (iii)$ Supposons maintenant que f^* est conservatif et montrons que f^* est fidèle. Soient $\alpha,\beta : E \longrightarrow E'$ tels que $f^*\alpha = f^*\beta$. Considérons le noyau de (α,β) :

$$\operatorname{Ker}(\alpha,\beta) \xrightarrow{\gamma} E \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} E'.$$

Mais comme f^* préserve les noyaux, on a une suite exacte

$$f^* \operatorname{Ker}(\alpha,\beta) = \operatorname{Ker}(f^*\alpha,f^*\beta) \xrightarrow{\gamma} f^*E \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} f^*E'.$$

Or, $f^*\alpha = f^*\beta$, donc $f^*\gamma$ est un isomorphisme, donc γ est un isomorphisme, donc $\alpha = \beta$. □

10 Ensembles ordonnés

Définition. — *Un* **treillis** *est un ensemble ordonné avec des bornes supérieures (notées $\vee$) et des bornes inférieures (notées $\wedge$) pour tout couple d'éléments. On notera* 0 *et* 1 *le plus petit et le plus grans élément d'un treillis, s'ils existent.*

Un **treillis distributif** *est un treillis dans lequel*

$$\forall x,y,z \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Cela implique

$$\forall x,y,z \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Définition. — *Une* **algèbre de Heyting** *est un treillis avec* 0 *et* 1 *et des* Hom *internes, notés* $(x \Rightarrow y) = \underline{\mathrm{Hom}}(x,y)$.

Rappel. — Une algèbre de Heyting est distributive.
Si on note $\neg x = (x \Rightarrow 0)$, on a

$$\begin{array}{ll} x \leqslant \neg\neg x & x \leqslant y \implies \neg y \leqslant \neg x \\ \neg x = \neg\neg\neg x & \neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y. \end{array}$$

Définition. — *Une* **algèbre de Boole** *est un treillis distributif avec* 0 *et* 1 *dont tout élément* x *possède une* **négation**, i.e., *un élément* $\neg x$ *tel que*

$$x \wedge \neg x = 0 \quad \textit{et} \quad x \vee \neg x = 1.$$

Rappel. — Une algèbre de Boole est une algèbre de Heyting dans laquelle

$$\forall x \quad \neg\neg x = x.$$

Définition. — *Un ensemble ordonné est* **complet** *s'il possède des bornes supérieures et inférieures de familles quelconques. Il suffit en fait de demander qu'il y ait des bornes supérieures.*

Rappel. — Une **algèbre de Heyting complète** est un ensemble ordonné avec des bornes supérieures et inférieures quelconques vérifiant la loi de distributivité infinie.

Exemple. — Les ouverts d'un espace topologique X forment une algèbre de Heyting complète :

$$\bigvee_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

$$\bigwedge_\alpha U_\alpha = \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_\alpha U_\alpha}}$$

$$\neg U = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus U}}.$$

Proposition. — *Soit E un objet d'un topos $\mathscr{E}$. L'ensemble* $\operatorname{Sub} E$ *des sous-objets de E est une algèbre de Heyting complète.*

Démonstration : Pour simplifier, on peut supposer que $\mathscr{E} = \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},J)$ est le topos des faisceaux sur un petit site.

Il existe des bornes inférieures quelconques : si $A_i \in E$, le préfaisceau défini par $(\bigwedge_i A_i)(C) = \bigcap A_i(C)$ est un faisceau. Il existe donc des bornes supérieures,

$$\bigvee_i A_i = \bigwedge \{ B \ : \ \forall i \quad A_i \subset B \}$$

Il reste à vérifier la distributivité infinie :

$$B \wedge \bigvee_i A = \bigvee_i (B \wedge A_i).$$

Elle résulte du fait que les limites inductives (ici, les réunions quelconques) commutent aux produits fibrés (ici, les intersections de deux sous-objets). □

Exemple. — La double négation d'un topos $\mathscr{E}$,

$$\neg\neg : \operatorname{Sub} E \longrightarrow \operatorname{Sub} E$$

définit l'adhérence d'une topologie de Lawvere–Tierney. Dans le topos correspondant $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},\neg\neg)$, les ensembles de sous-objets sont des algèbres de Boole. Dans les applications des topos à la logique, c'est le premier pas pour transformer un topos en modèle de la catégorie des ensembles.

11 Locales

Comme les topos, les locales [1] généralisent la notion d'espace topologique, mais ils sont plus simples : leur définition est purement combinatoire et surtout, ils forment une catégorie, pas une 2-catégorie. [2]

Définition. — *Un* **cadre** *est un treillis, dont toute famille finie possède une borne inférieure et dont toute famille possède une borne supérieure, vérifiant la loi de distributivité infinie*

$$U \wedge (\bigvee_i V_i) = \bigvee_i (U \wedge V_i).$$

1. Après l'exposé, j'ai retrouvé un article qui proposait de traduire *locale* par *lieu.*

2. On peut préciser cette comparaison : tout topos est équivalent au topos des faisceaux équivariants sur un groupoïde dans la catégorie des locales.

Définition. — *Un* **morphisme de cadres** *est un morphisme d'ensembles ordonnés qui préserve les bornes infiérieures finies et les bornes supérieures quelconques.*

Remarque. — Les cadres sont donc exactement les algèbres de Heyting :on utilise une terminologie différente pour préciser quelle est la structure préservée par les morphismes.

Définition. — *La catégorie des* **locales** *est la catégorie opposée à celle des cadres. Si X est une locale, on notera $O(X)$ le cadre correspondant. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de locales, on notera $f^{-1} : O(Y) \longrightarrow O(X)$ le morphisme de cadres correspondant.*

Exemple. — 1. À un espace topologique X, on peut associer une locale $\operatorname{Loc} X$: le cadre sous-jacent est celui de ses ouverts. Une application continue définit un morphisme de locales. Dans le cas des espaces topologiques *sobres*, *i.e.*, dont tout fermé irréductible possède exactement un point dense, les morphismes de locales correspondent bijectivement aux applications continues.

2. On peut même décrire les locales isomorphes aux locales associées à un espace topologique sobre. Un point d'une locale X est un morphisme de locales $1 \longrightarrow X$. On peut mettre une topologie (sobre) sur l'ensemble $\operatorname{Pt} X$ des points d'une locale X. Les locales provenant des espaces topologiques sobres sont exactement ceux tels que $\operatorname{Loc} \operatorname{Pt} X \simeq X$ (on dit qu'ils ont « suffisemment de points »).

12 Sous-locales

Nous allons maintenant donner une description combinatoire, en termes de cadres sous-jacents, des sous-objets dans la catégorie des locales.

Remarque. — 1. Le morphisme de cadres $f^{-1} : O(X) \longrightarrow O(Y)$ possède un adjoint à droite f_*, comme morphisme d'ensembles ordonnés (mais f_* n'est pas un morphisme de cadres en général). En effet, la définition d'une adjonction est

$$f^{-1}(V) \leqslant U \iff V \leqslant f_* U.$$

On vérifie alors que l'on définit bien une adjonction en posant

$$f_* U = \bigvee \{ V \ : \ f^{-1}(V) \leqslant U \}.$$

2. On en déduit que

$$U \leqslant f_* f^{-1} U, \qquad f^{-1} f_* V \leqslant V, \qquad f^{-1} f_* f^{-1} = f^{-1}, \qquad f_* f^{-1} f_* = f_*.$$

3. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de locales. En utilisant les identités précédentes, on voit que les assertions suivantes sont équivalentes. Quand elles sont vérifiées, on dit que f est un **plongement**.

(i) f^{-1} est surjectif;
(ii) $f^{-1} f_* = \mathrm{Id}$;
(iii) f_* est injectif

4. Soit f un plongement. L'image de $f_* : O(Y) \longrightarrow O(X)$ est l'ensemble de $U \in O(X)$ fixés par la monade $j = f_* f^{-1}$. On a

(i) $U \leqslant jU$;
(ii) $j^2 U = jU$;
(iii) $j(U \wedge U') = jU \wedge jU'$.

Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition. — *Un* **noyau** *d'une locale X est une application $j : O(X) \longrightarrow O(X)$ telle que*

(i) *$U \leqslant jU$;*
(ii) *$j^2 U = jU$;*
(iii) *$j(U \wedge U') = jU \wedge jU'$.*

Proposition. — *Soit j un noyau d'une locale X. Les points fixes*

$$O(X_j) = \{\, U \in O(X) \ : \ jU = U \,\}$$

forment un cadre et $j : O(X) \longrightarrow O(X_j)$ est un morphisme de cadres surjectif, i.e., *$X_j \longrightarrow X$ est un plongement. On dit que X_j est une* **sous-locale**.

Démonstration : Montrons tout d'abord que $O(X_j)$ est stable par bornes inférieures finies. On a $j1 = 1$, car $1 \leqslant j1$, donc $1 \in O(X_j)$. D'autre part, si $U = jU$ et $V = jV$, alors $j(U \wedge V) = jU \wedge jV = U \wedge V$, donc $U \wedge V \in O(X_j)$.

Les bornes supérieures dans $O(X_j)$ sont données par

$$\bigvee_{\alpha}^{O(X_j)} U_\alpha = j\Big(\bigvee_{\alpha}^{O(X)} U_\alpha\Big).$$

Il reste à vérifier la distributivité :

$$\begin{aligned} V \wedge j\Big(\bigvee_\alpha U_\alpha\Big) &= jV \wedge j \bigvee_\alpha U_\alpha \\ &= j\Big(V \wedge \bigvee_\alpha U\alpha\Big) \\ &= j\Big(\bigvee_\alpha V \wedge U_\alpha\Big). \end{aligned}$$

Cela montre que $O(X_j)$ est un cadre et que l'application $j : O(X) \longrightarrow O(X_j)$ est un morphisme de cadres. Il est surjectif par définition de $O(X_j)$. □

Exemple. — Si X est une locale et $U \in O(X)$, on peut voir U comme une sous-locale de X, définie par le noyau $\cdot \wedge U$. On dit que c'est une **sous-locale ouverte**.

Exemple. — Si X est une locale et $U \in O(X)$, on définit un sous-cadre

$$O(X - U) = \{\, V \in O(X) \; : \; U \leqslant V \,\}$$

et un morphisme de cadres surjectif

$$g^{-1} : \begin{cases} O(X) & \longrightarrow & O(X - U) \\ W & \longmapsto & W \vee U \end{cases}$$

qui correspond à un plongement de locales $X - U \longrightarrow X$, défini par le noyau $\cdot \vee U$. On dit que c'est une **sous-locale fermée**.

Exemple. — La double négation $\neg\neg : O(X) \longrightarrow O(X)$ est un noyau et le cadre

$$O(X_{\neg\neg}) = \{\, U \in O(X) \; : \; U = \neg\neg U \,\}$$

est une algèbre de Boole complète.

13 Topos localiques

Définition. — *Le topos des faisceaux $\mathfrak{Sh} X$ sur une locale X est la catégorie des faisceaux sur le site $O(X)$ muni de la topologie engendrée par les familles*

$(U_i \longrightarrow U_i)_i$ telles que $U = \bigvee_i U_i$ (c'est la topologie canonique). Un **topos localique** *est un topos équivalent au topos des faisceaux sur une locale.*

Proposition. — *Les assertions suivantes concernant un topos $\mathscr{T}$ sont équivalentes.*

(*i*) *$\mathscr{T}$ est localique ;*

(*ii*) *$\mathscr{T}$ est le topos des faisceaux sur un ensemble ordonné (on ne fait aucune hypothèse sur la topologie) ;*

(*iii*) *$\mathscr{T}$ est engendré par les sous-objets de l'objet final.*

Démonstration : (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) est immédiat : un cadre est un ensemble ordonné.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) Soit $\mathscr{E} = \mathfrak{Sh}(\mathfrak{P},J)$, où $\mathfrak{P}$ est un ensemble ordonné. D'après le critère de Giraud, on sait que le topos $\mathscr{E}$ est équivalent à la catégorie des faisceaux sur toute sous-catégorie (pleine) génératrice, munie de la topologie canonique.

On sait que $\mathscr{E}$ est engendré par l'image du plongement d'Yoneda, *i.e.*, par les $ay(p)$, où $p \in \mathfrak{P}$. Mais comme $\mathfrak{P}$ est un ensemble ordonné, les $y(p) \longrightarrow 1$ sont des monomorphismes. Mais le foncteur « faisceau associé » préserve les monomorphismes, donc les $ay(p)$ sont des sous-objets de l'objet final 1. On en déduit que le topos $\mathscr{E}$ est engendré par les sous-objets de l'objet final 1.

(*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) On peut écrire $\mathscr{E} = \mathfrak{Sh}(\mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}\, 1,K)$, où K est la topologie induite par la topologie canonique de $\mathscr{E}$. Comme $\mathrm{Sub}\, 1$ est une algèbre de Heyting complète, c'est un cadre. De plus, comme elle est définie à l'aide de sous-objets, la topologie K est en fait celle définie par la relation d'ordre sur $\mathrm{Sub}\, 1$. Par conséquent, le topos $\mathscr{E}$ est localique. $\square$

14 Factorisation d'un morphisme de topos

Définition. — *Un morphisme de locales $f : X \longrightarrow Y$ est un* **plongement** *si f_* est injectif, une* **surjection** *si f^* est injectif.*

Un morphisme de topos $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ est un **plongement** *si f_* est pleinement fidèle, une* **surjection** *si f^* est fidèle.*

Exemple. — Si j est une topologie de Lawvere–Tierney sur un topos $\mathscr{E}$, le morphisme $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j) \longrightarrow \mathscr{E}$ est un plongement.

Théorème. — ***Tout morphisme de topos $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ peut se factoriser en une surjection suivie d'un plongement.***

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathscr{E} \\
& \mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j) \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : (a) Commençons par définir une topologie sur $\mathscr{E}$. On définit l'adhérence d'un sous-objet $U \subset E$ par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\bar{U} \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & f_*f^*U \arrow[d, tail] \\
E \arrow[r] & f_*f^*E.
\end{tikzcd}$$

(b) Montrons maintenant que

$$V \subset \bar{U} \Longleftrightarrow f^*V \subset f^*U.$$

Tout d'abord, si $f^*V \subset f^*U$, on a $f_*f^*V \subset f_*f^*U$, donc

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr] & & & f_*f^*V \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& \bar{U} \arrow[r] \arrow[d, tail] & f_*f^*U \arrow[d] & \\
& E \arrow[r] & f_*f^*E, &
\end{tikzcd}$$

donc $V \subset U$.

Supposons maintenant que $V \subset \bar{U}$: on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, tail] \arrow[dr] & \bar{U} \arrow[r] \arrow[d] & f_*f^*U \arrow[d] \\
& E \arrow[r] & f_*f^*E,
\end{tikzcd}$$

puis, par adjonction,

$$\begin{tikzcd}
f^*V \arrow[r] \arrow[d, tail] & f^*U \arrow[d] \\
f^*E \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & f^*E,
\end{tikzcd}$$

donc $f^*V \subset f^*U$.

(c) En appliquant (b), on voit que l'on a bien défini une topologie en (a) :

$$U \subset \bar{U}, \qquad \bar{\bar{U}} = \bar{U}, \qquad \overline{U \wedge V} = \bar{U} \wedge \bar{V}$$

et le construction $U \longmapsto \bar{U}$ est fonctorielle.

(d) Pour voir que f se factorise par $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j)$, il suffit de voir que f^* transforme les sous-objets denses en isomorphismes : c'est le point (b).

(e) Il reste à voir que p est une surjection, *i.e.*, que les $\operatorname{Sub} E \longrightarrow \operatorname{Sub} f^*E$ sont surjectifs. Soient $U \subset V \subset E$ des sous-objets dans $\mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j)$ tels que $p^*U = p^*V$. Remarquons que

$$f^*i_*U = p^*i^*i_*U = p^*U.$$

De même, $f^*i_*V = p^*V$, donc $f^*i_*U = f^*i_*V$. Mais d'après (b), on en déduit $i_*U = i_*V$, car ce sont des sous-objets fermés. Comme i_* est une inclusion, on en conclut $U = V$. $\square$

Corollaire. — *Pour tout plongement de topos $\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$, il existe une topologie de Lawvere–Tierney j sur $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{F} \approx \mathfrak{Sh}\,(\mathscr{E},j) \longrightarrow \mathscr{E}$.*

Démonstration : Supposons que $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ soit un plongement. D'après le théorème, il existe une décomposition

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, shift left, "e"'] \arrow[dr, shift right] & & \mathscr{E} \\ & \mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j). \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

On a donc $f_* \simeq i_*p_*$, mais comme f_* et i_* sont pleinement fidèles, il en va de même pour p_*. par conséquent, les coünités $\varepsilon_F : p^*p_*F \longrightarrow F$ sont des isomorphismes. Or,

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "p^*\eta_E"'] & & p^*E \\ & p^*p_*p^* \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

donc $p^*\eta_E$ est un isomorphisme. Mais comme p est une surjection, le foncteur p^* est conservatif, donc $\eta_E : E \longrightarrow p_*p^*E$ est un isomorphisme. Comme les ε_F et les η_E sont des isomorphismes, on en déduit que p est une équivalence. $\square$

Théorème. — ***Cette décomposition est unique, à équivalence près.***

Démonstration : Supposons que l'on ait deux telles décompositions.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[dr, hook, "u"] & \\
\mathscr{F} \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "a"'] & & \mathscr{E}. \\
 & \mathscr{B} \arrow[ur, hook, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

D'après le corollaire précédent, on peut supposer que v est l'inclusion $\mathscr{B} = \mathfrak{Sh}(\mathscr{E},j) \longrightarrow \mathscr{E}$. Pour montrer que u se factorise par v, il va suffire de voir que le foncteur image réciproque u^* transforme les inclusions denses en isomorphismes. Soit donc $U \rightarrowtail E$ une inclusion dense. On en déduit un isomorphisme $v^*U \longrightarrow v^*E$, puis $q^*v^*U \longrightarrow q^*v^*E$. Mais comme

$$\begin{tikzcd}
q^*v^*U \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & p^*u^*U \arrow[d] \\
q^*v^*E \arrow[r, "\simeq"] & p^*u^*E,
\end{tikzcd}$$

on en déduit que $p^*u^*U \longrightarrow p^*u^*E$ est un isomorphisme. Or, p est une surjection, donc le foncteur p^* est conservatif, donc $u^*U \longrightarrow u^*E$ est un isomorphisme. Il existe donc un morphisme g tel que

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[dr, hook, "u"] \arrow[dd, "g"] & \\
\mathscr{F} \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "a"'] & & \mathscr{E}. \\
 & \mathscr{B}. \arrow[ur, hook, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

On remarquera que le morphisme g que l'on obtient est uniquement déterminé, car le foncteur u_* est pleinement fidèle.

On conclut en faisant le même raisonnement en intervertissant $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. $\square$

15 Locales et topos localiques

Nous allons montrer que les morphismes entre deux locales sont exactement les mêmes que les morphismes entre les topos correspondants, puis que les propriétés de ces morphismes (surjection, plongement) se correspondent.

Lemme. — *Soit X une locale. On a un isomorphisme de cadres*
$$O(X) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathfrak{Sh}\,X}\, 1.$$

Démonstration : Procéder comme pour les espaces topologiques. □

Lemme. — *Soient X et Y deux locales. On a une équivalence de catégories*
$$\mathfrak{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathfrak{Hom}(\mathfrak{Sh}\,X, \mathfrak{Sh}\,Y).$$

Démonstration : Les catégories suivantes sont équivalentes.

(*i*) les morphismes $\mathfrak{Sh}\,X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,Y$;

(*ii*) les foncteurs $A : O(Y) \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,X$ continus et exacts à gauche ;

(*iii*) les foncteurs $A : O(Y) \longrightarrow O(Y)$ continus et exacts à gauche (car si A est exact à gauche, il préserve les monomorphismes) ;

(*iv*) les foncteurs $A : O(Y) \longrightarrow O(Y)$ préservant les inclusions fermées (*i.e.*, exacts à gauche) et les réunions quelconques (*i.e.*, continus). □

Lemme. — *Un sous-topos d'un topos localique est encore localique.*

Démonstration : Soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ un plongement de topos, avec $\mathscr{F}$ localique, *i.e.*, engendré par les sous-objets $(U_i)_{i\in I}$ de 1. Les f^*U_i sont des sous-objets de 1 : nous allons montrer qu'ils engendrent $\mathscr{E}$, cela suffira pour établir que le topos $\mathscr{E}$ est localique.

Soient α, $\beta : E \longrightarrow E'$ deux morphismes distincts de E. Comme f_* est fidèle, on en déduit deux morphismes distincts $f_*\alpha \neq f_*\beta$. Comme les U_i engendrent $\mathscr{F}$, il existe un $i \in I$ et un morphisme $U_i \longrightarrow f_*E$ tel que les deux composés
$$U_i \longrightarrow f_*E \underset{f_*\beta}{\overset{f_*\alpha}{\rightrightarrows}} f_*E'$$
soient distincts. Mais par adjonction, ce morphisme $U_i \longrightarrow f_*E$ correspond à un morphisme $f^*U_i \longrightarrow E$, et les composés
$$f^*U_i \longrightarrow E \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} E'$$
sont encore distincts. □

Lemme. — *Si $\mathfrak{Sh}\,X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,Y$ est un plongement (respectivement une surjection), alors il en va de même pour $X \longrightarrow Y$.*

Démonstration : Si le foncteur $f_* : \mathfrak{Sh}\,X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,Y$ est fidèle, alors sa restriction $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{Sh}\,X}\,1 \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathfrak{Sh}\,Y}\,1$, *i.e.*, $f_* : O(X) \longrightarrow O(Y)$ est injective.

Si $f^* : \mathfrak{Sh}\,Y \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,X$ est fidèle, alors sa restriction $f^* : O(Y) \longrightarrow O(X)$ est injective. □

Lemme. — *Si $X \longrightarrow Y$ est une injection (respectivement une surjection), alors il en va de même pour $\mathfrak{Sh}\,X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,Y$.*

Démonstration : Factorisons le morphisme $\widetilde{f} : \mathfrak{Sh}\,X \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,Y$ en une surjection suivie d'un plongement.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Sh}\,X \arrow[rr, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & & \mathfrak{Sh}\,Y \\
& \mathscr{E} \arrow[ur, tail, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

D'après l'un des lemmes précédents, le topos $\mathscr{E}$ est localique : on peut supposer qu'il est de la forme $\mathscr{E} = \mathfrak{Sh}\,Z$ pour une locale Z. D'après un autre des lemmes précédents, on peut supposer que la décomposition provient d'une décomposition

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "g_0"'] & & Y \\
& Z. \arrow[ur, tail, "u_0"'] &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme précédent, u_0 est une surjection et g_0 un plongement.

Si f est un plongement, alors g_0 est un isomorphisme, donc g aussi, donc $\widetilde{f}$ est un plongement.

De même, si f est une surjection, alors u_0 est un isomorphisme, donc u aussi, donc $\widetilde{f}$ est une surjection. $\square$

16 Théorème de Diaconescu

Théorème. — ***Soit $\mathscr{E}$ un topos. Il existe une locale X et un morphisme surjectif ouvert $\mathfrak{Sh}X \twoheadrightarrow \mathscr{E}$.***

Démonstration : On peut supposer que $\mathscr{E}$ est le topos des faisceaux sur un petit site $(\mathfrak{C},J)$.

Nous allons construire un site $(\mathfrak{S},K)$, où $\mathfrak{S}$ est un ensemble ordonné, et un morphisme surjectif ouvert $\mathfrak{Sh}(\mathfrak{S},K) \twoheadrightarrow \mathscr{E}$. Comme les topos de faisceaux sur un ensemble ordonné sont localiques, cela suffira pour établir le théorème.

(a) Notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des chaînes

$$(C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0)$$

de flèches de $\mathfrak{C}$, muni de l'ordre $t \leqslant s$ si et seulement si t prolonge s (la chaîne t est alors plus longue (sur la gauche) que s). On a un foncteur

$$\pi : \begin{cases} \mathfrak{S} & \longrightarrow \mathfrak{C} \\ (C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0) & \longmapsto C_n. \end{cases}$$

(b) On munit $\mathfrak{S}$ de la topologie suivante : un crible U de $s \in \operatorname{Ob}\mathfrak{S}$ est couvrant si et seulement si

$$\forall t \leqslant s \quad \left\{ \pi(t' \leqslant t) : \pi(t') \longrightarrow \pi(t) \text{ où } t' \leqslant t \text{ et } t' \in U \right\} \in J(\pi t).$$

Il s'agit bien d'une topologie.

(c) Par construction, le foncteur π est surjectif, préserve les cribles et les foncteurs $\pi/s : \mathfrak{S}/s \longrightarrow \mathfrak{C}/\pi(s)$ sont surjectifs sur les objets.

(d) Il reste à vérifier que π possède la propriété de relèvement des cribles. Soit donc

$$s = (C_n \xrightarrow{\alpha_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} C_0)$$

un objet de $\mathfrak{C}$ et R un crible couvrant $\pi(s) = C_n$. On va construire un crible U de s, couvrant et tel que $\pi U \subset R$. Posons

$$\begin{aligned} U &= \left\{ t' \ : \ t' \leqslant s \quad \pi(t' \leqslant s) \in R \right\} \\ &= \left\{ (\alpha_{m+n}, \ldots, \alpha_0) \ : \ \alpha_{n+1} \circ \cdots \circ \alpha_{n+m} \in R \right\}. \end{aligned}$$

On a bien $\pi U \subset R$. Montrons que U couvre s. Soit $t \leqslant s$ un morphisme de $\mathfrak{S}$, avec $t = (\alpha_{n+m}, \ldots, \alpha_0)$. Notons $g = \pi(t \leqslant s) = \alpha_{n+1} \circ \cdots \circ \alpha_{n+m}$. On doit vérifier que le crible

$$\begin{aligned} &\left\{ \ \pi(t') \xrightarrow{\pi(t' \leqslant t)} \pi(t) \ \ : \ t' \in U \right\} \\ = &\left\{ \ \pi(t') \xrightarrow{\pi(t' \leqslant t)} \pi(t) \ \ : \ \left(\pi(t') \longrightarrow \pi(t) \xrightarrow{g} \pi(s) \right) \right\} \end{aligned}$$

est couvrant. Mais il s'agit de g^*R. $\square$

17 Théorème de Barr

Théorème. — *Soit $\mathscr{E}$ un topos, il existe une algèbre de Boole complète B et un morphisme surjectif $\mathfrak{Sh}B \twoheadrightarrow \mathscr{E}$.*

Démonstration : On sait, d'après le théorème précédent, qu'il existe une locale X et un morphisme surjectif ouvert $\mathfrak{Sh}X \twoheadrightarrow \mathscr{E}$. Il suffit donc de trouver une locale Y et un épimorphisme $Y \twoheadrightarrow X$ tels que $O(Y)$ soit une algèbre de Boole complète. On pose simplement

$$Y = \coprod_{U \in O(X)} (X - U)_{\neg\neg}.$$

C'est un coproduit dans la catégorie des locales, *i.e.*, un produit dans la catégorie des cadres. Comme les $O((X-U)_{\neg\neg})$ sont des algèbres de Boole complètes, il en va de même de leur produit $O(Y)$. Le morphisme $p : Y \longrightarrow X$ est induit par les inclusions

$$p_U : (X-U)_{\neg\neg} \rightarrowtail (X-U) \rightarrowtail X.$$

Il reste à vérifier que p est une surjection de locales, *i.e.*, que $p^{-1} : O(X) \longrightarrow O(Y)$ est injectif. Soient donc $U,V \in O(X)$, avec $U \neq V$. Quite à remplacer U et V par U et $U \wedge V$ puis V et $U \wedge V$, on peut supposer que $U \subset V$. On a alors $p_U^{-1}(U) = 0$ et $p_U^{-1}(V) \neq 0$, donc $p^{-1}(U) \neq p^{-1}(V)$. $\square$

18 Localisation booléenne

Remarque. — Dans le topos des faisceaux sur une algèbre de Boole, les ensembles de sous-objets $\operatorname{Sub} E$ sont des algèbres de Boole.

Lemme. — *Soit B une algèbre de Boole complète. Alors, le topos $\mathfrak{Sh}\, B$ vérifie l'axiome du choix,* i.e., *les épimorphismes de $\mathfrak{Sh}\, B$ possèdent des sections.*

Démonstration : Soit $p : X \twoheadrightarrow I$ un épimorphisme. D'après le lemme de Zorn (et puisque $\operatorname{Sub} I$ est *complet*), il existe un sous-objet maximal $m : M \rightarrowtail I$ sur lequel p a une section $s : M \longrightarrow X$, *i.e.*, $ps = m$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, dotted, "s"] \arrow[r, tail, "m"'] & I \end{tikzcd}$$

Supposons que $M \neq I$: son complémentaire $\neg M$ est donc non nul (car $\operatorname{Sub} I$ est une algèbre de Boole). Comme les sous-objets de 1, *i.e.*, les éléments de l'algèbre de Boole B, engendrent $\mathscr{E}$, il existe un sous-objet $V \subset 1$ non nul et un morphisme $t : V \longrightarrow \neg M$. Considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr] \arrow[d, "p'"'] & & X \arrow[d, "p"] \\ V \arrow[r, "t"'] & \neg M \arrow[r, tail] & I. \end{tikzcd}$$

Comme $V \neq \varnothing$ et p' est un épimorphisme, X' est non vide. Il existe donc un sous-objet non nul $W \subset 1$ et un morphisme $r : W \longrightarrow X$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "x"] & X' \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p'"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\
& V \arrow[r, "t"'] & \neg M \arrow[r, tail] & I
\end{tikzcd}$$

On a donc un morphisme $p' \circ r : W \longrightarrow V$, *i.e.*, $W \subset V$. Les deux flèches du haut du diagramme ci-dessus définissent une section de p sur l'image (non vide) $t(W)$ de W dans $\neg M$, car $W \longrightarrow t(W)$ est un isomorphisme : c'est un épimorphisme par définition de $t(W)$ et un monomorphisme car $W \subset 1$ en est un :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr] \arrow[dr] & & t(W) \arrow[dl] \\
& 1. &
\end{tikzcd}$$

On en déduit une section définie sur $M \vee t(W)$: cela contredit la maximalité de M. $\square$

Corollaire. — *Soit $\mathscr{E}$ un topos. Il existe un topos $\mathscr{F}$ vérifiant l'axiome du choix et un morphisme surjectif de topos $\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$.*

Remarque. — Ce résultat est en fait une généralisation de la résolution de Godement : pour le topos des faisceaux $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\, X$ sur un espace topologique X, le morphisme du corollaire précédent est obtenu en mettant la topologie discrète $\widetilde{X}$ sur X :

$$f : \mathfrak{S}\mathfrak{h}\, \widetilde{X} \longrightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{h}\, X$$

et la résolution de Godement d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur X est alors $f_* f^* \mathscr{F}$.

Les topos cohérents ont suffisement de points

Vincent ZOONEKYND
d'après MacLane–Moerdijk

3 mai 2000

19 Espace de Stone

Rappels. — Soit B une algèbre de Boole complète. Un **filtre** de B est une partie $F \subset B$ telle que

(i) $1 \in F$, $0 \notin F$;

(ii) $\forall a \in F \quad \forall b \geqslant a \quad b \in F$;

(iii) $\forall a,b \in F \quad a \wedge b \in F$.

D'après le lemme de Zorn, tout filtre est contenu dans un filtre maximal. L'**espace de Stone** $\operatorname{Stone} B$ a pour éléments les familles maximales de B et sa topologie est définie par la base d'ouverts $D(a) = \{\, \mathfrak{m} \ni a \,\}$ où $a \in B$. On sait que

(i) c'est un espace topologique compact ;

(ii) les $D(a)$ sont exactement les compacts ouverts ;

(iii) l'algèbre B est isomorphe à l'algèbre de Boole des compacts ouverts de $\operatorname{Stone} B$.

Le morphisme

$$\varphi : \begin{cases} O(\operatorname{Stone} B) & \longrightarrow \quad B \\ \quad U & \longmapsto \quad \varphi(U) = \bigvee \{\, b \in B \;:\; D(b) \subset U \,\} \end{cases}$$

est un morphisme de cadres surjectif.

20 Théorème de Deligne

Proposition. — *Soit B une algèbre de Boole. Le foncteur image directe*

$$i_* : \begin{cases} \mathfrak{Sh}\, B & \longrightarrow \quad \mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B \\ \quad F & \longmapsto \quad \begin{cases} O(\mathrm{Stone}\, B) & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ \quad U & \longmapsto \quad F(\varphi U) \end{cases} \end{cases}$$

préserve les familles épimorphiques finies.

Démonstration : Par manque de temps, elle n'a pas été faite ; voir [MM, Th IX.11.1, p.522]. $\square$

Définition. — *Soit $\mathfrak{C}$ une petite catégorie avec des limites projectives finies. Une* **prétopologie** *sur $\mathfrak{C}$ est la donnée, pour tout objet X, d'une famille $K(X)$ de familles de morphismes (dites* **familles couvrantes**[1]*) de but X, telle que*

- (i) *Les isomorphismes sont des familles couvrantes ;*
- (ii) *Les familles couvrantes sont stables par produits fibrés ;*
- (iii) *Si $\{ f_i : C_i \longrightarrow C \}_i \in K(C)$ et $\forall i \quad \{ g_{ij} : C_{ij} \longrightarrow C_i \}_j \in K(C_i)$ Alors $\{ f_i \circ g_{ij} : C_{ij} \longrightarrow C \}_{i,j} \in K(C)$.*

Définition. — *Un topos cohérent est un topos équivalent à la catégorie des faiseaux sur une petite catégorie (avec des limites projectives finies) munie d'une prétopologie définie par des familles couvrantes finies.*

Théorème. — ***Soit B une algèbre de Boole complète. Un morphisme de $\mathfrak{Sh}\, B$ vers un topos cohérent $\mathscr{E}$ s'étend à $\mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B$.***

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Sh}\, B \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathscr{E} \\ \mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Démonstration : On peut supposer que $\mathscr{E} = \mathfrak{Sh}(\mathfrak{C},K)$, où K est une topologie définie par des familles couvrantes finies. Soit $f : \mathfrak{S}\mathfrak{H}\, B \longrightarrow \mathscr{E}$ un morphisme de topos. Nous noterons i l'inclusion $\mathfrak{Sh}\, B \hookrightarrow \mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B$.

1. Il y a une autre notion de famille couvrante : une famille est couvrante (pour l'instant, disons couvrante-2), si le crible qu'elle engendre est couvrant. Une famille couvrante-1 est couvrante-2, mais la réciproque est fausse.

Le morphisme f provient (à isomorphisme près) d'un foncteur $A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\, B$ exact à gauche et continu. Le foncteur

$$A' = i_* \circ A : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B$$

est exact à gauche, car i_* et A le sont. Comme i^* préserve les familles épimorphiques finies et comme $(\mathfrak{C},K)$ est de type fini, le foncteur A' est continu. Il définit donc un morphisme géométrique

$$g : \mathfrak{Sh}\ \mathrm{Stone}\, B \longrightarrow \mathscr{E}$$

avec

$$g^* = \cdot \otimes A', \qquad g_*(F)(C) = \mathrm{Hom}(A'(C),F).$$

Montrons maintenant que g est bien un prolongement de f.

$$\begin{aligned} g_*(i_*G)(C) &= \mathrm{Hom}(A'C,i_*G) & \\ &\simeq \mathrm{Hom}(i^*A'C,G) & \text{par adjonction } i^* \dashv i_* \\ &= \mathrm{Hom}(i^*i_*AC,G) & \\ &\simeq \mathrm{Hom}(AC,G) & i^*i_* \simeq \mathrm{Id} \text{ car } i \text{ est un plongement} \\ &\simeq f_*(G)(C). & \end{aligned}$$

On a bien $g_* \circ i_* \simeq f_*$. □

Définition. — *On dit qu'un topos a* **suffisemment de points** *si pour tous morphismes $\alpha,\beta : E \longrightarrow D$ différents, il existe un point $p : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathscr{T}$ tel que $p^*\alpha \neq p^*\beta$.*

Remarque. — Le topos des faisceaux sur un espace topologique a suffisemment de points.

Corollaire. — *Un topos cohérent a suffisemment de points.*

Références

[MM] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory*, Universitext, Springer Verlag, 1992.