1-motifs

Vincent ZOONEKYND
<zoonek@math.jussieu.fr>
d'après S. LICHTENBAUM

14 mars 2001

Résumé

Après avoir défini et tenté de motiver la notion de 1-motif, nous construisons, en suivant [L], une filtration sur l'homologie de Suslin d'une courbe, dont le gradué associé fait apparaître le 1-motif.

Les motifs sont les objets d'une catégorie abélienne hypothétique, dans laquelle prendrait ses valeurs une cohomologie de Weil universelle. On dispose pour l'instant de la catégorie des *motifs purs*, permettant de décrire la cohomologie des variétés projectives lisses et de divers candidats pour la catégorie dérivée des *motifs mixtes*. Les 1-*motifs* sont une autre réalisation incomplète de ce programme : ils permettent de décrire le premier groupe de cohomologie des variétés. La catégorie des 1-motifs est donc un morceau de la catégorie des motifs mixtes.

1 Jacobiennes généralisées

Dans tout cet exposé, on se place sur un corps algébriquement clos.

Notation 1.1. — Soit X une courbe projective lisse, S un ensemble fini de points de X, G un schéma en groupes commutatifs et $f : X \dashrightarrow G$ une application rationnelle régulière sur $X \setminus S$. Si $D = \sum_i \lambda_i P_i$ est un diviseur de X, étranger à S, on note $f(D) = \sum_i \lambda_i f(P_i)$, où la somme est celle de la loi de groupe de G.

Définition 1.2. — Soit X une courbe projective lisse et S un ensemble fini de points de X. Une **jacobienne généralisée** de X/S est une application rationnelle vers un schéma en groupes commutatifs $f : X \dashrightarrow \mathrm{Pic}_0(X/S)$, tel que

$$\forall \varphi \in k(X) \qquad \big(\forall P \in S \quad \varphi(P) = 1\big) \implies f\big((\varphi)\big) = 0,$$

et qui soit universel pour cette propriété, *i.e.*, si $g : X \dashrightarrow G$ est une autre application rationnelle vérifiant la même propriété, il existe un unique morphisme (de groupes algébriques) h avec[1]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Pic}_0(X/S) \arrow[d, dotted, "h"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

[1] modulo translation : voir [S].

Théorème 1.3. — ***Soient X une courbe projective lisse et S un ensemble fini de points de X.***

(i) ***Il existe une jacobienne généralisée*** $X \longrightarrow \mathrm{Pic}_0(X/S)$.

(ii) ***Il y a une suite exacte*** $0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathrm{Pic}_0(X/S) \longrightarrow \mathrm{Pic}_0 X \longrightarrow 0$ ***où T est un tore (i.e., une variété abélienne de la forme $\mathbb{G}_m^n$) et $\mathrm{Pic}_0 X$ une variété abélienne.***

(iii) ***Il y a une bijection naturelle***[2]

$$\mathrm{Pic}_0(X/S) \simeq \frac{\textit{diviseurs de } X\textit{, de degré nul, étrangers à } S}{(\varphi) \textit{ où } \varphi \in k(X) \textit{ et } \forall P \in S \quad \varphi(P) = 1}.$$

Démonstration : Voir [S]. □

Remarque 1.4. — Une **variété semi-abélienne** est un schéma en groupe commutatifs, extension d'une variété abélienne par un tore : la jacobienne généralisée est l'archétype des variétés semi-abéliennes.

Remarque 1.5. — On peut généraliser cette notion en remplaçant l'ensemble fini S par une famille $(P, n_P)_{P\in S} \in X \times \mathbb{N}^\times$ de points de X avec des multiplicités : il suffit de remplacer les conditions « $\varphi(P) = 1$ » ci-dessus par « $\varphi(P) = 1$ avec multiplicite au moins n_P », *i.e.*, $\nu_P(\varphi - 1) \geqslant n_P$, où ν_P est la valuation au point P.

On peut voir $\mathrm{Pic}_0(X/S)$ comme la jacobienne généralisée de la courbe lisse non projective $X \setminus S$.

Si X est une courbe projective non lisse, avec des points doubles ordinaires (pour simplifier), ses singularités définissent un ensemble S de points de sa normalisée X', et on peut voir $\mathrm{Pic}_0(X'/S)$ comme la jacobienne généralisée de X. Nous n'utiliserons pas ce point de vue.

Remarque 1.6. — La jacobienne d'une courbe projective lisse X peut être définie de deux manières équivalentes :

(i) comme une variété abélienne A munie d'un morphisme $X \longrightarrow A$, universelle (à translation près) ;

(ii) un schéma en groupes représentant un certain foncteur, défini en termes de diviseurs.

Ces deux objets se généralisent aux variétés projectives lisses de dimension quelconque, mais ne coïncident plus : il s'agit de la variété d'Albanese et de la variété de Picard. Les jacobiennes généralisées devraient peut-être s'appeler « variétés d'Albanese généralisées ».

2 Structures de Hodge

Exemple 2.1. — Soit X une variété complexe projective lisse. On se place dans une carte

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}^n \\ X & \end{tikzcd}$$

[2]L'adjectif « naturel » signifie qu'un certain foncteur (que nous ne précisons pas) est représentable.

et on note $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées locales correspondantes.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] \arrow[rr, bend left, "z_i"] & \mathbb{C}^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbb{C} \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Oublions un instant la structure complexe de X et regardons-la comme une variété réelle. En posant $x_i = \operatorname{Re} z_i$ et $y_i = \operatorname{Im} z_i$, on a des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Les formes différentielles sur U, à valeur dans $\mathbb{C}$, sont des combinaisons linéaires de formes différentielles de la forme

$$g\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_r}\, dy_{j_1} \cdots dy_{j_s}$$

où $g : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction différentiable. En posant

$$dz_i := dx_i + idy_i, \qquad d\bar{z}_i := dx_i - idy_i,$$

on remarque que toute forme différentielle est combinaison linéaire des

$$f\, dz_{i_1} \cdots dx_{i_p}\, d\bar{z}_{j_1} \cdots d\bar{z}_{j_q}.$$

Une telle forme sera dite **de type (p, q)**. Le théorème de Hodge nous dit que cette décomposition persiste au niveau des classes de cohomologie :

$$H^n\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X) \quad \text{et} \quad \overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

où $H^{p,q}(X)$ désigne l'ensemble des classes de cohomologie dans $H^{p+q}\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big)$que l'on peut représenter par une forme différentielle de type (p, q).

On peut vérifier que la notion de « forme différentielle de poids (p, q) » ne dépend pas du choix de la carte ; les sous-espaces vectoriels $H^{p,q}(X)$ sont donc bien définis.

On dira que $H^n\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}\big)$ est munie d'une structure de Hodge pure de poids n.

Définition 2.2. — Une **structure de Hodge pure de poids n**, c'est un espace vectoriel réel V et une bigraduation de son complexifié

$$V_{\mathbb{C}} = V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}$$

tels que

(i) $\forall p, q \qquad p + q \neq n \implies V^{p,q} = 0$;

(ii) $\forall p, q \qquad \overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$.

Remarque 2.3. — Au lieu de se donner un espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}}$ et de considérer son complexifié $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, il revient au même de se donner un espace vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}}$ et un sous-espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{C}}$ tel que $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.4. — *Une structure de Hodge pure de poids n, c'est un espace vectoriel réel V et une filtration F sur son complexifié $V_{\mathbb{C}}$ telle que*

$$\forall p, q \qquad p+q \neq n \implies \mathrm{Gr}^p_F \mathrm{Gr}^q_{\bar{F}} = 0.$$

Démonstration : On passe de la bigraduation à la filtration en posant

$$F^p = \bigoplus_{\substack{p',q \\ p' \geqslant p}} V^{p',q}$$

et de la filtration à la bigraduation en posant

$$V^{p,q} = F^p \cap \bar{F}^q. \qquad \square$$

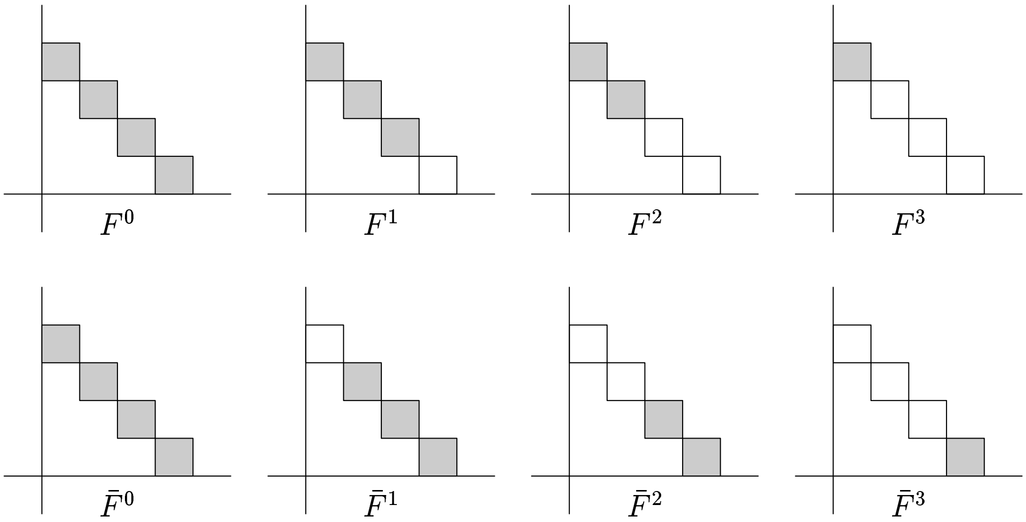


FIG. 1 – *Les filtrations d'une structure de Hodge pure de poids $n = 3$.*

Remarque 2.5. — On a aussi

$$\forall p, q \qquad p+q = n+1 \implies F^p \oplus \bar{F}^q = V_{\mathbb{C}}.$$

Remarque 2.6. — On peut se demander pourquoi on retient souvent la définition en termes de filtration plutôt que celle en termes de décomposition en somme directe. La raison en est que les filtrations se comportent assez bien au travers d'une suite exacte (ou spectrale), contrairement aux sommes directes. Si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

d'espaces vectoriels complexes, on peut en déduire une filtration $0 \subset A \subset B$ de B, mais pas de décomposition $B = A \oplus C$, car il n'y a pas de moyen d'identifier *canoniquement* C à un sous-espace de B.

Définition 2.7. — Une **structure de Hodge complexe pure** est un espace vectoriel complexe V et deux filtrations décroissantes $F^\bullet$ et $\bar{F}^\bullet$ telles que

$$\forall p, q \qquad p+q \neq n \implies \mathrm{Gr}^p_F \mathrm{Gr}^q_{\bar{F}} = 0.$$

Remarque 2.8. — On a une équivalence entre la catégorie des espaces vectoriels réels dont le complexifié est muni d'une bigraduation et la catégorie des espaces vectoriels réels munis d'une action du groupe algébrique réel S, obtenu par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ à partir du groupe multiplicatif. On a donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$ et $S_{\mathbb{C}} = \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}^{\times}$. L'action de $S_{\mathbb{R}}$ sur $V_{\mathbb{C}}$ est définie par

$$z \cdot v = z^p \bar{z}^q v \quad \text{si } v \in V^{p,q}.$$

On peut exprimer cela de manière encore plus compliquée en disant que cette catégorie est tannakienne neutre, de groupe fondamental S (voir [DM, 2.31]).

Une structure de Hodge mixte est une extension (a priori non triviale) de structures de Hodge pures : dans la pratique, elle apparaissent quand on a « décomposé », au moyen d'une suite exacte ou d'une suite spectrale, un objet (ou sa cohomologie) en morceaux plus simples (variétés projectives lisses) munis d'une structure de Hodge pure.

Définition 2.9. — Une **structure de Hodge complexe mixte**, c'est la donnée d'un espace vectoriel complexe H, de deux filtrations décroissantes $F^{\bullet}$ et $\bar{F}^{\bullet}$ et d'une filtration croissante $W_{\bullet}$ telles que

$$\forall p, q, n \qquad p + q \neq n \implies \operatorname{Gr}_F^p \operatorname{Gr}_{\bar{F}}^q \operatorname{Gr}_n^W = 0.$$

Remarque 2.10. — En particulier, on a une structure de Hodge pure de poids n sur chaque Gr_n^W, et des composantes

$$V^{p,q} = \operatorname{Gr}_F^p \operatorname{Gr}_{\bar{F}}^q \operatorname{Gr}_{p+q}^W.$$

Ansi, on dira par exemple qu'une structure de Hodge V est de type  si les seules composantes non nulles sont $V^{-1,0}$ et $V^{0,-1}$.

Remarque 2.11. — Un morphisme de structures de Hodge mixtes est un morphisme d'espaces vectoriels qui respecte toutes les filtrations On démontre qu'un tel morphisme f est nécessairement strict, *i.e.*, on n'a pas simplement $f(F^p) \subset F^p$, $f(\bar{F}^p) \subset \bar{F}^p$ et $f(W_n) \subset W_n$, mais carrément

$$f(F^p) = f(V_{\mathbb{C}}) \cap F^p, \qquad f(\bar{F}^p) = f(V_{\mathbb{C}}) \cap \bar{F}^p \qquad \text{et} \qquad f(W_n) = f(V_{\mathbb{C}}) \cap W_n.$$

On peut en déduire que les structures de Hodge forment une catégorie abélienne (contrairement, par exemple, à la catégorie des espaces vectoriels réels munis d'une seule filtration, qui est additive et exacte mais pas abélienne).

Les structures de Hodge complexes mixtes forment même une catégorie abélienne semi-simple. Les problèmes d'extension non triviales n'apparaîtrons que pour les structures de Hodge entières.

Définition 2.12. — Une **structure de Hodge réelle mixte**, c'est un espace vectoriel réel V, muni d'une filtration croissante W, ainsi qu'une filtration décroissante F sur son complexifié $V_{\mathbb{C}}$, tels que

$$\forall p, q, n \qquad p + q \neq n \implies \operatorname{Gr}_F^p \operatorname{Gr}_{\bar{F}}^q \operatorname{Gr}_n^W = 0.$$

Définition 2.13. — Une **structure de Hodge entière**, c'est un espace vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}}$, un $\mathbb{Z}$-module $V \subset V_{\mathbb{C}}$ tel que le sous-espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} V$ vérifie $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$ une filtration croissante W sur $V_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} V$, une filtration décroissante F sur $V_{\mathbb{C}}$ tels que

$$\forall p, q, n \qquad p + q \neq n \implies \mathrm{Gr}_F^p \, \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \, \mathrm{Gr}_n^W = 0.$$

Remarque 2.14. — Il revient au même de se donner un $\mathbb{Z}$-module de type fini V, une filtration croissante W sur $V_{\mathbb{Q}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, une filtration décroissante F sur $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ tels que

$$\forall p, q, n \qquad p + q \neq n \implies \mathrm{Gr}_F^p \, \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \, \mathrm{Gr}_n^W = 0.$$

Théorème 2.15 (Deligne). — ***Il existe un foncteur de la catégorie des variétés sur $\mathbb{Q}$ vers la catégorie des structures de Hodge mixtes qui prolonge la structure de Hodge des variétés projectives lisses.***

Démonstration : Voir [D_2]. $\square$

Exemple 2.16. — Regardons sur un exemple d'où viennent les structures de Hodge mixtes : cherchons à calculer la structure de Hodge mixte de la cohomologie de la réunion X des deux variétés X_1 et X_2 de la figure 2.

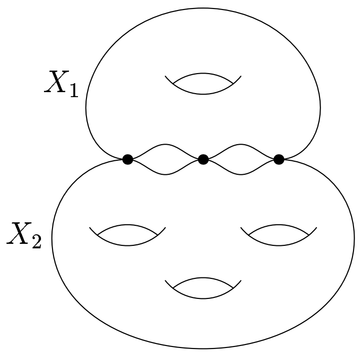


FIG. 2 – *Variété projective non lisse (réunion de deux courbes complexes projectives lisses de genre* 1 *et* 3*) ; nous allons calculer la structure de Hodge de sa cohomologie.*

1. La première chose à faire est de trouver une suite exacte (ou spectrale) qui relie la cohomologie de X, que l'on cherche, à la cohomologie des différentes variétés projectives lisses qui interviennent, dont on connait la structure de Hodge. Ici, la suite de Mayer–Vietoris fait l'affaire.

$$0 \to H^0X \to H^0X_1 \oplus H^0X_2 \to H^0(X_1 \cap X_2) \to H^1X \to H^1X_1 \oplus H^1X_2 \to H^1(X_1 \cap X_2) \to 0.$$

On peut l'écrire plus simplement

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^0(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H^1(X) & \longrightarrow & H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) & \longrightarrow & 0. \\ & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & \mathbb{C}^2 & & & & \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^6 & & \end{array}$$

2. Il faut maintenant regarder comment les morphismes se comportent vis-à-vis des différentes filtrations (ou, dans le cas de morphismes qui ont une interprétation géométrique, ce

qu'ils font aux formes différentielles de type (p,q)). Ici, il n'y a pas de problème, les morphismes respectent les filtrations. En cas contraire, il aurait fallu *décaller* certaines de ces filtrations pour que les morphismes les respectent.

3. Comme on peut interpréter les éléments de $H^\bullet(X)$ comme des la cohomologie d'un complexe construit à l'aide de formes différentielles (sur $X_1 \amalg X_2$, qui coïncident sur $X_1 \cap X_2$), on définit une filtration de Hodge $F^\bullet$ sur ce complexe et on en déduit une filtration $F^\bullet$ sur $H^1(X)$.

4. Pour la filtration par le poids, regardons le type des formes différentielles qui apparaissent dans la suite exacte.

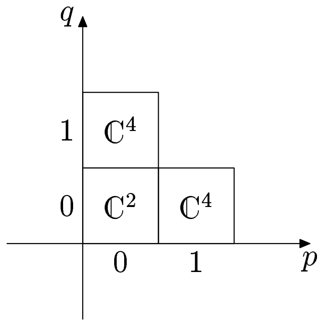
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^0(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X) & \longrightarrow & H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & (0,0) & & & & (1,0) \text{ ou } (0,1) & & \end{array}$$

On pose donc

$$W_0 = \operatorname{Im} \delta$$
$$W_1 = H^1(X)$$

et on a des structures de Hodge sur $W_0 \simeq \widetilde{H}^0(X_1 \cap X_2)$ et sur $W_1/W_0 \simeq H^1(X_1) \oplus H^1(X_2)$. On peut vérifier que ce sont bien celles définies par la filtration $F^\bullet$.

Finalement, la structure de Hodge sur $H^1\big(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}\big)$ est donnée par la figure suivante.



Exemple 2.17. — La **structure de Tate** est la structure de Hodge pure de poids -2, de type , définie par l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ et le réseau $\mathbb{Z}(1) = 2\pi i \subset \mathbb{C}$.

Pour tout entier n, on définit alors $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$.

Définition 2.18. — Une **polarisation** d'une structure de Hodge V, pure de poids n, c'est une application $\Phi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Z}(-n)$ telle que $(x,y) \longmapsto (2\pi i)^n \Phi(x, i\cdot y)$ soit une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $V_\mathbb{R}$. (Rappelons que « $i \cdot y$ » désigne l'action de $S_\mathbb{R} = \mathbb{C}^\times$ décrite en 2.8.)

3 1-motifs

Remarque 3.1. — Comme la jacobienne d'une courbe projective lisse est une variété abélienne, qui permet de décrire le premier groupe de (co)homologie de la courbe, on peut voir ces variétés abéliennes comme des 1-motifs purs. Le théorème suivant conforte cette idée.

Théorème 3.2. — ***On a une équivalence entre la catégorie des variétés abéliennes et la catégorie des structures de Hodge entières, sans torsion, de type , polarisables.***

Remarque 3.3. — On peut tenter de généraliser cela aux courbes lisses non nécessairement projectives : la jacobienne généralisée d'une telle courbe est une variété semi-abélienne ; on peut donc voir les variétés semi-abéliennes comme des 1-motifs.

Théorème 3.4. — ***Il y a une équivalence entre la catégorie des variétés semi-abéliennes et la catégorie des structures de Hodge entières, sans torsion, de type , dont la partie*** Gr^W_{-1} ***de poids*** -1 ***est polarisable.***

Remarque 3.5. — Mais cela ne nous donne pas tous les 1-motifs : la catégorie des 1-motifs devrait être stable par dualité ; or le dual d'une structure de Hodge de type est une structure de Hodge de type , qui n'est pas dans notre catégorie.

Définition 3.6. — Un **1-motif** est un diagramme

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d] & & \\ 1 \arrow[r] & T \arrow[r] & G \arrow[r] & A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

où G est un schéma en groupes commutatifs, extension d'un tore T et d'une variété abélienne A, et M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. On regardera souvent un 1-motif comme un objet $[M \longrightarrow G]$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Théorème 3.7. — ***On a une équivalence entre la catégorie des 1-motifs et la catégorie des structures de Hodge entières, sans torsion, de type , dont la partie de poids*** -1 ***est polarisable.***

Démonstration : Voir [D_2, p.53–57]. □

4 1-motif d'une courbe

Définition 4.1. — Soit X une courbe non nécessairement projective, avec au pire des points doubles ordinaires (pour simplifier). On note X' sa normalisée. Soient $\{P_i,\ i \in I\}$ les points singuliers de X, $S = \{Q_{ij}\}$ les points de X' au dessus des P_i, $\bar{X}'$ la complétée de la normalisée X' et $\bar{X}$ le quotient de $\bar{X}'$ obtenu en identifiant les points de $\bar{X}'$ identifiés dans X.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X}' \arrow[d] & S = \bar{X}' \setminus X' \\ X \arrow[r] & \bar{X} & S \simeq \bar{X} \setminus X \end{tikzcd}$$

On pose

$$\mathbb{Z}[Q \longrightarrow P] = \mathrm{Ker}\big(\mathbb{Z}[Q_{i,j}] \longrightarrow \mathbb{Z}[P_i]\big)$$
$$\mathbb{Z}_0[Q \longrightarrow P] = \mathrm{Div}_0\, X' \cap \mathbb{Z}[Q \longrightarrow P].$$

Le 1-motif de X est

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z}_0[Q \longrightarrow P] \arrow[d] & & \\ 1 \arrow[r] & T \arrow[r] & \mathrm{Pic}_0\, \bar{X}'/S \arrow[r] & \mathrm{Pic}_0\, \bar{X}' \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

où la suite exacte du bas est celle de 1.3.

Remarque 4.2. — Il s'agit du 1-motif homologique de la courbe X. Deligne a aussi défini le 1-motif cohomologique d'une courbe [D$_2$, 10.3.4].

5 Homologie de Suslin d'une courbe et 1-motifs

Définition 5.1. — On considère le schéma cosimplicial

$$\Delta_n = \mathrm{Spec}\, \frac{k[t_0, \ldots, t_n]}{\langle t_0 + \cdots + t_n - 1\rangle}.$$

Soit X une courbe avec au pire des points doubles ordinaires (pour simplifier). On note $\mathrm{Sus}^n X$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés irréductibles et réduits $Z \subset \Delta^n \times X$ tels que $Z \longrightarrow \Delta^n$ soit surjectif et fini.

On note toujours $\mathrm{Sus}^\bullet X$ le complexe de groupes abéliens (regardé comme un objet dans la catégorie dérivée des groupes abéliens) associé au groupe abélien simplicial $\mathrm{Sus}^\bullet X$: c'est le **complexe de Suslin** de la courbe X.

Théorème 5.2. — ***Soit X une courbe avec au pire des points doubles ordinaires (pour simplifier). Il existe une filtration sur son complexe de Suslin***

$$\mathrm{Sus}^\bullet X = F_2 \supset F_1 \supset F_0 \supset F_{-1} = 0$$

telle que

$$F_2/F_1 \simeq h_2(X) = (k^\times)^f[-1]$$
$$F_1/F_0 \simeq h_1(X)$$
$$F_0/F_{-1} \simeq h_0(X) = \mathbb{Z}^e$$

où e est le nombre de composantes connexes de X, f le nombre de composantes irréductibles complètes de X et $h_1(X)$ est le 1-motif homologique de X.

6 Démonstration

On peut supposer que la courbe est connexe.

Lemme 6.1. — *Le théorème est vrai dans le cas d'une courbe lisse.*

Démonstration : Dans ce cas, le 1-motif de X est simplement

$$h_1(X) = [0 \longrightarrow \operatorname{Pic}_0 \bar{X}/S].$$

On a trois suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^n \arrow[r] & \operatorname{Sus}^n X \arrow[r] & \operatorname{Pic}(\Delta^n \times \bar{X}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & 0 \\ & & & \operatorname{Pic} \bar{X} & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow k^\times \longrightarrow L^n \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K^n \longrightarrow L^n \longrightarrow (k^\times)^{\operatorname{Card} S} \longrightarrow 0$$

où

- $\operatorname{Sus}^n X$ est le groupe des diviseurs disjoints de $\Delta^n \times S$ et finis sur Δ^n ;
- L^n est l'ensemble des fonctions $\varphi \in k(\Delta^n \times \bar{X})$ de diviseur étranger à $\Delta^n \times S$ et fini sur Δ^n ;
- K^n est l'ensemble des fonctions $\varphi \in k(\Delta^n \times \bar{X})$ telles que $f = 1$ sur $\Delta^n \times S$, de diviseur fini sur Δ^n.

Supposons $S \neq \varnothing$. D'après le lemme 6.2, le complexe $K^\bullet$ est acyclique. On en déduit

$$\begin{aligned} H_0(L^\bullet) &= (k^\times)^{\operatorname{Card} S} \\ H_i(L^\bullet) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1 \\ H_0(I^\bullet) &= (k^\times)^{\operatorname{Card} S - 1} \\ H_i(I^\bullet) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1 \\ H_i(\operatorname{Sus}^\bullet X) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1. \end{aligned}$$

La cohomologie du complexe de Suslin $\operatorname{Sus}^\bullet X$ est concentrée en degré zéro et on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow (k^\times)^{\operatorname{Card} S - 1} \longrightarrow H_0(\operatorname{Sus}^\bullet X) \longrightarrow \operatorname{Pic} \bar{X} \longrightarrow 1.$$

En revenant à la définition de ce complexe, on voit que

$$H_0(\operatorname{Sus}^\bullet X) \simeq \frac{\operatorname{Sus}^0 X}{K^0}$$

et que

$$1 \longrightarrow \operatorname{Pic}_0(\bar{X}/S) \longrightarrow \frac{\operatorname{Sus}^0 X}{K^0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Cela permet de conclure dans le cas $S \neq \varnothing$: on a un isomorphisme

$$\mathrm{Sus}^\bullet X \approx \big[H_0(\mathrm{Sus}^\bullet) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\big]$$

et la suite exacte précédente définit une filtration de ce complexe,

F_{-1}	F_0	F_1	F_2
0	$\mathrm{Pic}_0(\bar{X}/S)$	$H_0(\mathrm{Sus}^\bullet X)$	$H_0(\mathrm{Sus}^\bullet X)$

dont les gradués sont $\mathrm{Pic}_0(\bar{X}/S)$, $\mathbb{Z}$ et 0.

Supposons maintenant $S = \varnothing$. Une chasse dans les diagrammes similaire à la précédente donne

$$\begin{aligned}
H_0(L^\bullet) &= (k^\times)^{\mathrm{Card}\, S}\\
H_i(L^\bullet) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1\\
H_0(I^\bullet) &= 0\\
H_1(I^\bullet) &= k^\times\\
H_i(I^\bullet) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 2\\
H_0(\mathrm{Sus}^\bullet X) &= \mathrm{Pic}\, X\\
H_1(\mathrm{Sus}^\bullet X) &= k^\times\\
H_i(\mathrm{Sus}^\bullet X) &= 0 \quad \text{pour } i \geqslant 2.
\end{aligned}$$

On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Sus}^\bullet X \approx \big[k^\times \times \mathrm{Pic}\, X \longrightarrow k^\times \times k^\times \longrightarrow 0\big]$$

où le morphisme est défini par

$$\begin{cases} k^\times \times \mathrm{Pic}\, X & \longrightarrow \quad k^\times \times k^\times \\ \quad (a,b) & \longmapsto \quad (a,0). \end{cases}$$

On en déduit une première filtration

F_{-1}	F_0	F_1
0	$\big[k^\times\{0\} \longrightarrow k^\times \times k^\times\big] \approx [0 \longrightarrow k^\times] \approx k^\times[-1]$	$\big[k^\times \times \mathrm{Pic}\, X \longrightarrow k^\times \times k^\times\big]$

dont les gradués sont $k^\times[-1]$ et $\mathrm{Pic}\, X$. Mais à l'aide de la filtration $0 \subset \mathrm{Pic}_0 X \subset \mathrm{Pic}\, X$ de $\mathrm{Pic}\, X$, dont les gradués sont $\mathrm{Pic}_0 X$ et $\mathbb{Z}$, on en déduit une filtration de notre complexe dont les gradués sont $k^\times[-1]$, $\mathrm{Pic}_0 X$ et $\mathbb{Z}$. $\square$

Lemme 6.2. — *Le complexe de groupes abéliens (multiplicatifs) $K^\bullet$, définis par*

$$K^n = \big\{\, f \in k(\Delta^n \times X) \;:\; (f) \text{ fini sur } \Delta^n \text{ et } f = 1 \text{ sur } \Delta^n \times S \,\big\},$$

est acyclique.

Démonstration : Commençons par rappeler que l'on peut associer deux complexes quasi-isomorphes au groupe abélien simplicial $K^\bullet$:

$$\Big(K^n, d = \sum_i (-1)^i d^i\Big)_n \approx \Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} d^i, (-1)^n d^n\Big)_n.$$

Nous allons montrer que le second est acyclique.

Supposons pour commencer $n \geqslant 1$. Soit $f = f(t_1, \dots, t_n, x)$ telle que

$$\begin{aligned} f(0, t_2, \dots, t_n, x) &= 1 \\ &\vdots \\ f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0, x) &= 1 \\ f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 1 - t_1 - \dots - t_{n-1}, x) &= 1. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on peut écrire

$$f = 1 + t_1 \cdots t_n (1 - t - 1 \cdots - t_n) \frac{u}{s}$$

avec u, $s \in k(X)[t_1, \dots, t_n]$. On pose alors

$$h = 1 + t_1 \cdots t_n t_{n+1} \frac{u}{s}.$$

On a bien $d_i h = 1$, $d_{n+1} h = f$, mais mais il n'y a aucune raison pour que (h) soit fini sur Δ^n. On la modifie donc en posant

$$h' = 1 + t_1 \cdots t_n t_{n+1} \frac{u}{s} + t_1 \cdots t_n t_{n+1} (1 - t_1 - \dots - t_{n+1}) \varphi,$$

où φ est une fonction possédant un zéro en tout point de S et des pôles en dehors de ceux de u ou s. On peut vérifier qu'en chaque point $(t_1, \dots, t_{n+1})$ de Δ^n, il existe un point $Q \in X$ tel que $h'(t, Q) \neq 0$ et un point $Q' \in X$ tel que $h'(t, Q') \neq \infty$, *i.e.*, h' n'est constante égale à zéro ou à ∞ sur aucune des fibres : cela dit bien que (h') est fini sur Δ^n.

On traiterait de même le cas $n = 0$: on a alors $f = 1$ sur S, on pose $h = 1 + t(f - 1)$ et on modifie h si nécessaire. □

Lemme 6.3. — *Le théorème est vrai dans le cas d'une courbe singulière.*

Démonstration : On note comme plus haut X' la normalisée de X, $\bar{X}'$ sa complétée et $\bar{X}$ la complétée de X.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X}' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

On a une suite exacte qui relie le complexe de Suslin de X et celui de X' :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Q \longrightarrow P] \longrightarrow \operatorname{Sus}^n X' \longrightarrow \operatorname{Sus}^n X \longrightarrow 0$$

qui rentre dans un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\theta_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\theta_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"] & \operatorname{Sus}^\bullet X' \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1"] & \operatorname{Sus}^\bullet X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_{\geqslant 0}\mathbb{Z}[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d] & t_{\geqslant 0}\operatorname{Sus}^\bullet X' \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme $\operatorname{Ker}\theta_0 = 0$, on a $\operatorname{Ker}\theta_1 \simeq U \simeq H_1(\operatorname{Sus}^\bullet X')[-1] = (k^\times)^f[-1]$ où f est le nombre de composantes irréductibles complètes de X.

Pour identifier T, remarquons que dans la suite exacte

$$0 \to t_{\geqslant 0}\mathbb{Z}[Q \to P] \to t_{\geqslant 0}\operatorname{Sus}^\bullet X' \to T \to 0,$$

les deux premiers termes ont leur homologie concentrée en degré zéro. On a donc

$$\begin{aligned} T &\simeq \left[H_0(t_{\geqslant 0}\mathbb{Z}[Q \to P]) \to H_0(t_{\geqslant 0}\operatorname{Sus}^\bullet X')\right] \\ &\simeq \left[\mathbb{Z}[Q \to P] \to \operatorname{Pic}(\bar{X}'/S)\right]. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_0[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_0[Q] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_0[P] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[Q] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[P] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^e \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_0[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[Q \to P] \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}_0(\bar{X}'/S) \arrow[r] & \operatorname{Pic}(\bar{X}'/S) \arrow[r] & \mathbb{Z}^e \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i.e.,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h_1(X) \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & \operatorname{Sus}^\bullet X \arrow[r, "\varphi"'] & \dfrac{\operatorname{Sus}^\bullet X}{U}. & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit une filtration sur $\mathrm{Sus}^\bullet X$,

F_{-1}	F_0	F_1	F_2
0	$U \approx (k^\times)^f[-1]$	$\varphi^{-1}\big(h_1(X)\big)$	$\mathrm{Sus}^\bullet X$

dont les gradués sont $(k^\times)^f[-1]$, $h_1(X)$ et $\mathbb{Z}$. □

Références

[D$_1$] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. IHES, **40**, 1971, 5–58.

[D$_2$] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES, **44**, 1974, 5–77.

[DM] P. DELIGNE and J. MILNE, *Tannakian categories*, in *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, P. DELIGNE, J.S. MILNE, A. OGUS and K. SHIH editors, LNM, Springer Verlag, 1982.

[D$_3$] A. DURFEE, *A naive guide to mixed Hodge theory*, in *Singularities, part 1, proceedings of the summer research institute on singularities held at Humbolt State University, Arcata, California, july 20–august 7, 1981*, P. ORLIK editor, Proceedings of symposia in pure mathematics, **40**, AMS, 1983, 313–320.

[L] S. LICHTENBAUM, *Suslin homology and Deligne 1-motives*, in *Algebraic K-theory and algebraic topology*, P.G. GOERSS and J.F. JARDINE editors, Kluwer Academic Publishers, 1993, 189–196.

[R] N. RAMACHANDRAN, *From jacobians to 1-motives : exposition of a conjecture of Deligne*, `math.ag/0102033`.

[S] J. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1975.