THÉORÈME DE VAN KAMPEN POUR LES CHAMPS ALGÉBRIQUES

Vincent Zoonekynd

<zoonek@math.jussieu.fr>

Abstract

We define a category whose objects are finite étale coverings of an algebraic stack and prove that it is a Galois category and that it allows one to compute the fundamental group of the stack.

We then prove a Van Kampen theorem for algebraic stacks whose simplest form reads: Let U and V be open substacks of an algebraic stack X with $X = U \cup V$, let P be a set of base points, at least one in each connected component of X, U, V and $U \cap V$, then there is a cocartesian square of fundamental progroupoids

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, P) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, P) \arrow[d] \\
\pi_1(V, P) \arrow[r] & \pi_1(X, P). \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

Introduction

Le groupe fondamental d'un espace topologique (semi-localement simplement connexe) peut se définir de deux manières : à l'aide de chemins tracés sur cet espace ou à l'aide de ses revêtements. Cette deuxième définition se généralise aisément aux schémas : la catégorie des revêtements finis d'un schéma X, *i.e.*, la catégorie dont les objets sont les morphismes étales finis $Y \longrightarrow X$ et dont les morphismes $(Y \longrightarrow X) \longrightarrow (Y' \longrightarrow X)$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y' \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

est galoisienne, *i.e.*, équivalente à la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue d'un certain groupe profini, uniquement déterminé (à isomorphisme non unique près) ; c'est ce groupe que l'on définit comme le groupe fondamental profini du schéma X.

Nous nous intéressons à la généralisation de ces résultats aux champs algébriques [LM, V], qui apparaissent par exemple dans l'étude des espaces de modules de courbes : on peut les voir comme des « objets géométriques » qui « ressemblent localement », pour la topologie étale, à des quotients de schémas par des groupes finis, ou comme des analogues algébriques des orbifolds [T, MP]. On peut définir le groupe fondamental d'un champ algébrique à l'aide de schémas simpliciaux [O, F] où à l'aide de faisceaux étales localement constants finis [L, M_1, Z_2] qui jouent le rôle des revêtements. Une définition du groupe fondamental d'un champ algébrique à l'aide d'une catégorie de revêtements est problématique, car les champs algébriques ne forment pas tant une catégorie qu'une 2-catégorie. Nous montrons comment définir cette 1-catégorie de revêtements (définitions 2.3, 3.1) et montrons qu'elle est galoisienne et équivalente à la catégorie des faisceaux étales localement constants finis (théorème 3.2) : elle permet donc de calculer le groupe fondamental d'un champ.

Nous nous intéressons ensuite à l'un des moyens de calculer des groupes fondamentaux : le théorème de Van Kampen. Sous sa forme classique, il permet de calculer le groupe fondamental d'une réunion $U \cup V$, connaissant celui des morceaux U, V et de leur intersection $U \cap V$, sous réserve tout soit connexe. Il peut aussi se formuler en termes de *groupoïdes* [B], ce qui permet de se libérer des hypothèses de connexité. Le théorème de Van Kampen est déjà connu pour les orbifolds : il est par exemple démontré par [H] à l'aide d'espaces classifiants ou par [P, 4.13] à l'aide de la propriété universelle définissant le groupoïde fondamental. Quant-à nous, c'est à l'aide de la théorie de la descente [G] que nous établirons un théorème de Van Kampen pour le groupoïde fondamental d'un champs algébrique, et retrouverons donc le résultat pour les orbifolds (théorème 5.1).

Voici maintenant le plan de ce travail.

Dans une première section, nous rappelons la définition du groupe fondamental d'un champ algébrique à l'aide de faisceaux étales localement constants finis [L, M_1, Z_2, Z_1].

Dans une seconde section, nous considérons une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et un objet $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ et nous définissons la 2-catégorie $\mathfrak{C}/X$ des objets de $\mathfrak{C}$ au dessus de X, puis la 1-catégorie associée ; nous montrons que ces notions se comportent « bien » vis-à-vis des produits fibrés.

Dans une troisième section, nous utilisons ces constructions pour définir la 2-catégorie des revêtements étales finis d'un champ algébrique X, comme une sous-catégorie pleine de la 2-catégorie $\mathfrak{Champs}/X$ des champs au dessus de X, puis montrons que la 1-catégorie associée est équivalente à la catégorie des faisceaux étales localement constants finis sur X : elle permet de calculer le groupe fondamental.

Dans une quatrième section, nous énonçons un théorème de Van Kampen pour le calcul du groupoïde fondamental d'un topos dans lequel on a choisi des points-base et le démontrons à l'aide du théorème de Van Kampen « usuel » exprimé en termes de données de descente.

Dans une cinquième et dernière section, nous appliquons ce théorème au cas des champs algébriques.

1 Groupoïde fondamental d'un champ algébrique

Nous rappelons brièvement les résultats de [L] et [Z_1, Z_2] définissant le pro-groupoïde fondamental d'un topos localement connexe, en particulier du topos des faisceaux étales sur un champ algébrique, à partir de la sous-catégorie des objets localement constants, qui est équivalente au topos classifiant d'un progroupoïde.

Notations 1.1. — Si $\mathscr{T}$ est un topos, nous noterons $\varnothing$ son objet initial et $*$ son objet final.

Définition 1.2. — *Un objet X d'un topos $\mathscr{T}$ est* ***connexe*** *si pour tout isomorphisme $X \simeq A \amalg B$, on a $A \simeq \varnothing$ ou $B \simeq \varnothing$.*

Définition 1.3. — *Un topos est* ***localement connexe*** *s'il est engendré par ses objets connexes ou, ce qui revient au même, si le foncteur* ***objet constant***

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \mathfrak{Ens} & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ I & \longmapsto & I_{\mathscr{T}} = \coprod_{i \in I} * \end{array} \right.$$

(où $\mathfrak{Ens}$ désigne la catégorie des ensembles) possède un adjoint à gauche, noté π et appelé foncteur « composantes connexes ».

Définition 1.4. — *Un objet F d'un topos $\mathscr{T}$ est* ***trivialisé*** *par un objet U si sa restriction $F|_U = (F \times U \longrightarrow U)$ est un objet constant de $\mathscr{T}/U$.*

Définition 1.5. — *Un objet F d'un topos $\mathscr{T}$ est* ***localement constant*** *s'il existe un crible R couvrant l'objet final $*$ tel que tous les objets connexes de R trivialisent F.*

Définition 1.6. — *Un* ***point*** *d'un topos $\mathscr{T}$ est un morphisme de topos depuis le topos ponctuel (la catérorie des ensembles),* i.e., $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathscr{T}$.

Les points d'un topos $\mathscr{T}$ et leurs isomorphismes forment un groupoïde que nous noterons $\mathfrak{Points}\ \mathscr{T}$.

Si G est un groupoïde, nous noterons $\mathfrak{B}G$ son ***topos classifiant,*** i.e., *la catégorie des préfaisceaux sur le groupoïde opposé à G. Par exemple, si G est un groupe, $\mathfrak{B}G$ est la catégorie des ensembles munis d'une action de G* à gauche.

Théorème 1.7. — ***Soit $\mathscr{T}$ un topos localement connexe.***

Pour tout crible R couvrant l'objet final $*$ de $\mathscr{T}$, la sous-catégorie pleine $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ ***des objets localement constants trivialisés par les objets connexes de R est équivalente au topos classifiant du groupoïde*** $\mathfrak{Points}\ \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ ***des points de*** $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$.

La sous-catégorie pleine $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ ***des somme disjointes d'objets localement constants de $\mathscr{T}$ est un topos qui s'identifie à la 2-limite projective des topos classifiants de groupoïdes*** $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$,

$$\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} = \underset{R \in J(*)}{2\text{-}\varprojlim}\ \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R).$$

Démonstration : Voir [L]. □

Définition 1.8. — *Un* ***point-base*** *d'un topos localement connexe $\mathscr{T}$ est un morphisme de topos* $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$.

Remarque 1.9. — Un point-base de $\mathscr{T}$ définit une composante connexe de $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ et même de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$: on peut le démontrer comme suit. D'après [Z_1, I.1.11.a], les composantes connexes de $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ sont exactement celles de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$. Or, d'après [L, 3.2.8],

$$\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) \approx \mathfrak{B}\ \mathfrak{Points}\ \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R),$$

où $\mathfrak{B}\ \mathfrak{Points}\ \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$ désigne le topos classifiant du groupoïde des points de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$. Donc un point de $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ définit un point de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R)$

$$\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{LC}(\mathscr{T}, R),$$

i.e., un objet du groupoïde $\mathfrak{Points}$ LC($\mathscr{T}$, R), donc une composante connexe de ce groupoïde, donc une composante connexe de son topos classifiant.

Un choix de points-bases $P = (p_i : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T})_{i\in I}$, avec au moins un point-base dans chaque composante de SLC $\mathscr{T}$, permet de définir des groupoïdes $\pi_1(\mathscr{T}, R, P)$, dont l'ensemble des objets est P, et des équivalences $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, R) \approx \mathfrak{B}\,\pi_1(\mathscr{T}, R, P)$. On a donc

$$\mathfrak{B}\ \text{“}\varprojlim_{R\in J(*)}\text{”}\ \pi_1(\mathscr{T}, R, P) := \underset{R\in J(*)}{2\text{-}\varprojlim}\,\mathfrak{B}\,\pi_1(\mathscr{T}, R, P) \approx \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}.$$

Nous dirons que $\pi_1(\mathscr{T}, P) = \underset{R\in J(*)}{2\text{-}\varprojlim}\,\pi_1(\mathscr{T}, R, P)$ est le **progroupoïde fondamental** de $\mathscr{T}$.

Notations 1.10. — Par **champ algébrique**, nous entendrons toujours « champ de Deligne–Mumford » [DM, LM, V]. Les champs algébriques forment une 2-catégorie $\mathfrak{Champs}$ dont les 2-morphismes sont des isomorphismes.

Définition 1.11. — *Le **site étale** $X_{\text{ét}}$ d'un champ algébrique X a pour objets les morphismes étales $f : T \longrightarrow X$, où T est un schéma, pour morphismes $f \longrightarrow f'$ les couples $(\varphi : T \longrightarrow T', \alpha : f'\varphi \longrightarrow f)$*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et pour familles couvrantes les familles épimorphiques.

Lemme 1.12. — *Soit X un champ algébrique. Considérons le site $X'_{\text{ét}}$, dont les objets sont les morphismes étales $f : T \longrightarrow X$, où T est un champ algébrique, dont les morphismes sont les couples $(\varphi : T \longrightarrow T', \alpha : f'\varphi \longrightarrow f)$*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "f'"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

modulo la relation d'équivalence

$$(\varphi,\, \alpha) \sim (\varphi',\, \alpha') \iff \exists \beta \quad \begin{tikzcd} T \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \beta"] \arrow[dr, "f"'] & & T' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \textit{2-commutatif}$$

$$\iff \exists \beta : \varphi \longrightarrow \varphi' \textit{ tel que } \quad \begin{tikzcd} f'\varphi \arrow[rr, "f'\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & f'\varphi' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & f & \end{tikzcd}$$

et dont les familles couvrantes sont les familles épimorphiques.

Les topos $\mathfrak{Sh}\ X_{\text{ét}}$ et $\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}$ sont équivalents.

Démonstration : On a un foncteur pleinement fidèle $X_{\text{ét}} \longrightarrow X'_{\text{ét}}$, la topologie sur $X_{\text{ét}}$ est la trace de celle sur $X'_{\text{ét}}$ et tout objet de X' peut être recouvert par des objets de $X_{\text{ét}}$: d'après le lemme de comparaison [SGA4, III 4.1], on a donc une équivalence de catégories

$$\mathfrak{Sh}\ X_{\text{ét}} \approx \mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}.$$ □

Théorème 1.13. — ***Le topos des faisceaux étales sur un champ algébrique X est localement connexe ; on définit alors***

$$\pi_1(X) = \pi_1 \operatorname{SLC} \mathfrak{Sh}\ X_{\text{ét}}.$$

Démonstration : Voir [Z$_1$]. □

Remarque 1.14. — Ces résultats ont des analogues profinis. Soit $\mathscr{T}$ un topos localement connexe.

Un objet localement constant F est dit **localement constant fini** si pour tout objet U trivialisant F, la restriction $F|_U = (F \times U \longrightarrow U)$ est un objet constant fini de $\mathscr{T}/U$, *i.e.*, une somme disjointe finie de copies de l'objet final de $\mathscr{T}/U$.

La sous-catégorie pleine $\operatorname{SLCF} \mathscr{T}$ des sommes disjointes d'objets localement constants finis est équivalente au topos classifiant d'un groupoïde profini.

Un **point-base profini** de $\mathscr{T}$ est un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \operatorname{SLCF} \mathscr{T}$.

Si P est un ensemble de points-bases profinis de $\mathscr{T}$, au moins un dans chaque composante connexe de SLCF $\mathscr{T}$, on définit le **groupoïde fondamental profini** de $\mathscr{T}$ comme

$$\widehat{\pi}_1(\mathscr{T},\, P) = \pi_1(\mathrm{SLCF}\, \mathscr{T},\, P).$$

On a alors SLCF $\mathscr{T} \approx \mathfrak{B}\pi_1(\mathrm{SLCF}\, \mathscr{T},\, P)$.

2 Interlude sur les 2-catégories

On peut définir le groupe fondamental (profini) d'un schéma X à l'aide de faisceaux localement constants finis ou à l'aide de revêtements étales, *i.e.*, de morphismes étales et finis vers X. Cette seconde description du groupe fondamental ne s'étend pas immédiatement au cas où X est un champ algébrique : en effet, les morphismes étales finis $Y \longrightarrow X$ ne forment pas une catégorie mais sont des 1-morphismes dans une 2-catégorie — comment en faire une catégorie ?

Étant donnés une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et un objet X de $\mathfrak{C}$, nous allons donner une définition de la 2-catégorie $\mathfrak{C}/X$ des objets au dessus de X et de la catégorie $\mathfrak{Cat}(\mathfrak{C}/X)$ associée à cette 2-catégorie, de sorte que la notion de 2-produit fibré au dessus de X se transforme d'abord en 2-produit puis en produit. Nous utiliserons ces notions pour construire une 2-catégorie $\mathfrak{Rev}\, X$ puis une catégorie $\mathfrak{Cat}\, \mathfrak{Rev}\, X$ dont les objets sont les revêtements du champ algébrique X et montrerons qu'elle est équivalente à la catégorie LCF $\mathfrak{Sh}\, X$ des faisceaux étales localement constants finis sur X.

Définition 2.1. — *La catégorie $\mathfrak{Cat}\, \mathfrak{C}$ associée à une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ a pour objets les objets de $\mathfrak{C}$ et pour morphismes les classes d'isomorphisme de* 1-*morphismes de $\mathfrak{C}$.*

Lemme 2.2. — *Un* 2-*produit dans $\mathfrak{C}$ devient un produit dans $\mathfrak{Cat}\, \mathfrak{C}$.*

Démonstration : Soient X et Y deux objets de $\mathfrak{C}$. Montrons que leur 2-produit-fibré $X \overset{2}{\times} Y$ dans $\mathfrak{C}$ est aussi leur produit fibré dans $\mathfrak{Cat}\, \mathfrak{C}$.

(a) Le produit de X et Y dans $\mathfrak{Cat}\, \mathfrak{C}$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \\ Y, & \end{tikzcd}$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $\varphi : T \longrightarrow X \times Y$ tel que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

commute.

(b) D'après la définition de $\mathfrak{Cat}\ \mathfrak{C}$, cette propriété s'écrit aussi : pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $\varphi : T \longrightarrow X \times Y$ et des isomorphismes $\alpha_1 : p_1\varphi \longrightarrow q_1$, $\alpha_2 : p_2\varphi \longrightarrow q_2$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \alpha_1"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow \alpha_2"] & X \\ & Y, & \end{tikzcd}$$

de plus, le morphisme φ est unique à isomorphisme (non unique, a priori) près.

(c) Par contre la propriété 2-universelle du 2-produit-fibré s'écrit : pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $\varphi : T \longrightarrow X \times Y$ et des 2-isomorphismes $\alpha_1 : p_1\varphi \longrightarrow q_1$, $\alpha_2 : p_2\varphi \longrightarrow q_2$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha_1"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\alpha_2"] & X \\
& Y, &
\end{tikzcd}$$

de plus, le morphisme φ est unique à *unique* isomorphisme près, au sens suivant : si

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha'_1"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\alpha'_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

est un autre diagramme comme ci-dessus, il existe un unique isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "\varphi"{name=A}] \arrow[r, bend right, "\varphi'"'{name=B}] \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\gamma"] & X \overset{2}{\times} Y
\end{tikzcd}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\varphi'"'] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*, les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
p_1\varphi \arrow[r, "p_1\gamma"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & p_1\varphi' \arrow[d, "\alpha'_1"] \\
& q_1
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
p_2\varphi \arrow[r, "p_2\gamma"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & p_2\varphi' \arrow[d, "\alpha'_2"] \\
& q_2
\end{tikzcd}
\quad \text{commutent.}$$

La condition (c) implique donc bien la condition (b). $\square$

Définition 2.3. — *Soit X un objet d'une 2-catégorie $\mathfrak{C}$. La 2-catégorie $\mathfrak{C}/X$ des objets de $\mathfrak{C}$ au dessus de X a pour objets les 1-morphismes $f : Y \longrightarrow X$ de $\mathfrak{C}$, pour 1-morphismes $(Y,\, f) \longrightarrow (Z,\, g)$ les couples $(\varphi : Y \longrightarrow Z,\, \alpha : g\varphi \longrightarrow f)$*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\alpha"] & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et pour 2-morphismes $(\varphi,\, \alpha) \longrightarrow (\psi,\, \beta)$ les 2-morphismes

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & Z \end{tikzcd}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\beta"] & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, i.e., *le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} g\varphi \arrow[rr, "g\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & g\psi \arrow[dl, "\beta"] \\ & f & \end{tikzcd}$$

Lemme 2.4. — *Le foncteur d'oubli*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}/X & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ (Y \longrightarrow X) & \longmapsto & Y \end{array} \right.$$

transforme les 2-produits en 2-produits-fibrés.

Démonstration : (a) Un 2-produit $Y \times Z$ dans $\mathfrak{C}/X$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \times Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Z \\ Y & \end{tikzcd}$$

tel que pour tout diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & Z \\
Y &
\end{tikzcd}
$$

il existe un morphisme φ et des 2-morphismes α_1, α_2,

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
 & Y \times Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha_2"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\alpha_1"] & Y \\
 & Z, &
\end{tikzcd}
$$

tels que pour tout autre diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi'"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
 & Y \times Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha'_2"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\alpha'_1"] & Y \\
 & X, &
\end{tikzcd}
$$

il existe un unique isomorphisme

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\varphi'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & T'
\end{tikzcd}
$$

tel que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\varphi'"'] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
 & Y \times Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Z \\
 & Y, &
\end{tikzcd}
$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$
\begin{tikzcd}
p_1\varphi \arrow[r, "p_1\gamma"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & p_1\varphi' \arrow[d, "\alpha'_1"] \\
 & q_1
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
p_2\varphi \arrow[r, "p_2\gamma"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & p_2\varphi' \arrow[d, "\alpha'_2"] \\
 & q_2
\end{tikzcd}
$$

(b) D'après la définition de $\mathfrak{C}/X$, le 2-produit $X \overset{2}{\times} Y$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

il existe φ, α_1, α_2 rendant le diagramme suivant 2-commutatif,

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
\arrow[r, phantom, "\Leftarrow \alpha_1"] & Y \overset{2}{\times} Z \arrow[u, phantom, "\Uparrow \alpha_2"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

et tel que pour tout autre diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi'"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
\arrow[r, phantom, "\Leftarrow \alpha'_1"] & Y \overset{2}{\times} Z \arrow[u, phantom, "\Uparrow \alpha'_2"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

il existe un unique isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "\varphi"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\varphi'"'{name=D}] & Y \overset{2}{\times} Z
\arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

tel que

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, shift left, "\varphi"] \arrow[rr, shift right, "\varphi'"'] \arrow[dr] & & Y \overset{2}{\times} Z \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, shift left, "\varphi"] \arrow[dr, shift right, "\varphi'"'] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

soient 2-commutatifs (mais comme le premier diagramme est contenu dans le second, on peut l'oublier).

(c) En remarquant que tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\beta", near end] \arrow[ur, phantom, "\alpha", near start] & X
\end{tikzcd}$$

définit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta\alpha^{-1}"] & X
\end{tikzcd}$$

et que réciproquement, tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma"] & X
\end{tikzcd}$$

définit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\gamma", near end] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}", near start] & X,
\end{tikzcd}$$

on voit que le produit fibré $Y \overset{2}{\times} Z$ dans $\mathfrak{C}/X$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Z \arrow[d] \\
Y \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

tel que pour tout

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & Z \arrow[d] \\
Y \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma"'] & X
\end{tikzcd}$$

il existe un diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \alpha_2"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \alpha_1"] & & \\
& Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Z \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow] & X
\end{tikzcd}$$

et tel que pour tout autre diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \alpha'_2"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \alpha'_1"] & & \\
& Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Z \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow] & X
\end{tikzcd}$$

il existe un unique isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\varphi'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & Y \overset{2}{\times} Z
\end{tikzcd}$$

tel que

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& Y \overset{2}{\times} Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Z \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif. Mais il s'agit de la propriété 2-universelle définissant le 2-produit-fibré $Y \overset{2}{\times}{}_X Z$ dans $\mathfrak{C}$. $\square$

Remarque 2.5. — En général, $\mathfrak{Cat}\ (\mathfrak{C}/X) \not\approx (\mathfrak{Cat}\ \mathfrak{C})/X$. Considérons par exemple la 2-catégorie $\mathfrak{C}$ définie par

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob}\mathfrak{C} &= \{\, X,\, Y\,\} & \operatorname{Ob}\mathfrak{hom}(Y,\, X) &= \{a\} \\
\mathfrak{hom}(X,\, X) &= \{\mathrm{Id}_X\} & \operatorname{Hom}(a,\, a) &= \{\mathrm{Id}_a,\, \alpha\} \\
\mathfrak{hom}(Y,\, Y) &= \{\mathrm{Id}_Y\} & \alpha^2 &= \mathrm{Id}_a \\
\mathfrak{Hom}(X,\, Y) &= \varnothing. & &
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "a"'] \arrow[rr, phantom, bend left=60, "\alpha"] & & X \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathfrak{Cat}\,(\boldsymbol{\mathfrak{C}}/X)$ a alors a pour seul objet et $\{\mathrm{Id}_a,\, \alpha\}$ pour morphismes, alors que $(\mathfrak{Cat}\,\boldsymbol{\mathfrak{C}})/X$ a a pour seul objet et Id_a pour seul morphisme.

Nous n'utiliserons pas le résultat suivant par la suite.

Lemme 2.6. — *Soit $U \longrightarrow X$ un objet d'une 2-catégorie $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$. On a une équivalence de 2-catégories $(\boldsymbol{\mathfrak{C}}/X)/U \approx \boldsymbol{\mathfrak{C}}/U$.*

Démonstration : Notons $u : U \longrightarrow X$. Nous allons décrire les 2-catégories $\boldsymbol{\mathfrak{C}}/U$ et $\boldsymbol{\mathfrak{C}}/X/U$ et constater qu'elles sont équivalentes.

(a) La catégorie $\boldsymbol{\mathfrak{C}}/U$ a pour objets les $f' : F \longrightarrow U$, pour morphismes $(F,\, f') \longrightarrow (G,\, g')$ les $(h : F \longrightarrow G,\, \delta : g'h \longrightarrow f')$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\delta"] & G \arrow[dl, "g'"] \\ & U, & \end{tikzcd}$$

et les 2-morphismes

$$\begin{tikzcd} (F,\, f') \arrow[r, bend left, "(h,\delta)"] \arrow[r, bend right, "(k,\zeta)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & (G,\, g') \end{tikzcd}$$

sont les 2-morphismes

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & G \end{tikzcd} \qquad \text{tels que} \qquad \begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & g'k \arrow[d, "\zeta"] \\ & f'. \end{tikzcd} \qquad \text{commute.}$$

(b) La catégorie $\boldsymbol{\mathfrak{C}}/X/U$ a pour objets les $(F,\, f : F \longrightarrow X,\, f' : F \longrightarrow U,\, \alpha : uf' \longrightarrow f)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & U \arrow[dl, "u"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

pour 1-morphismes $(F,\, f,\, f',\, \alpha) \longrightarrow (G,\, g,\, g',\, \beta)$ les $(h : F \longrightarrow G,\, \gamma : gh \longrightarrow f,\, \delta : g'h \longrightarrow f')$,

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\gamma"] & G \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\delta"] & G \arrow[dl, "g'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
uf' \arrow[d, "\alpha"'] & ug'h \arrow[l, "u\delta"'] \arrow[d, "\beta h"] \\
f & gh \arrow[l, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

commute, (on remarquera que la condition définit γ en fonction de δ, on peut donc voir un 1-morphisme comme la donnée de h et δ tout seuls) et pour 2-morphismes

$$\begin{tikzcd}
(F,\, f,\, f',\, \alpha) \arrow[r, bend left, "{(h,\gamma,\delta)}"] \arrow[r, bend right, "{(k,\varepsilon,\zeta)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & (G,\, g,\, g',\, \beta)
\end{tikzcd}$$

les $\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & G \end{tikzcd}$ tels que $\begin{tikzcd} gh \arrow[r, "g\eta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & gk \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & f \end{tikzcd}$ et $\begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & kg' \arrow[d, "\zeta"] \\ & f' \end{tikzcd}$ commutent.

(c) On définit alors un 2-foncteur

$$\mathfrak{C}/U \longrightarrow \mathfrak{C}/X/U$$

$$F \xrightarrow{f'} U \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "uf'"'] & & U \arrow[dl, "u"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\delta"] & G \arrow[dl, "g'"] \\
& U &
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\delta"] & G \arrow[dl, "g'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & G \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & g'k \arrow[d, "\zeta"] \\ & f' \end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & G \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} gh \arrow[r, "g\eta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & gk \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & f \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & g'k \arrow[d, "\zeta"] \\ & f' \end{tikzcd}$$

Ce 2-foncteur est essentiellement surjectif, car pour tout objet $(F,\, f,\, f',\, \alpha)$ de $\mathfrak{C}/X/U$, on a un isomorphisme

$$(F,\, uf',\, f',\, \mathrm{Id}) \xrightarrow{(\mathrm{Id},\, \mathrm{Id},\, \alpha)} (F,\, f,\, f',\, \alpha)$$

Montrons que ce 2-foncteur est pleinement fidèle, *i.e.*, que l'on a des équivalences (et même, en fait, des isomorphismes) de catégories

$$\mathfrak{hom}_{\mathfrak{C}/U}\big((F,\, f'),\, (G,\, g')\big) \longrightarrow \mathfrak{hom}\big((F,\, uf',\, f',\, \mathrm{Id}),\, (G,\, ug',\, g',\, \mathrm{Id})\big).$$

Tout d'abord les objets, à droite comme à gauche, sont les diagrammes

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \delta"] & G \arrow[dl, "g'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

D'autre part, à gauche les morphismes sont les

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & g'k \arrow[d, "\zeta"] \\ & f' \end{tikzcd}$$

et à droite ce sont les

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g'h \arrow[r, "g'\eta"] \arrow[dr, "\delta"'] & g'k \arrow[d, "\zeta"] \\ & f' \end{tikzcd} \qquad \text{tels que} \qquad \begin{tikzcd} gh \arrow[r, "g\eta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & gk \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & f \end{tikzcd} \text{ commute}$$

or cette dernière condition est automatiquement vérifiée. $\square$

3 Interprétation géométrique des revêtements d'un champ algébrique

On note $\mathfrak{Champs}$ la 2-catégorie des champs algébriques. Si X est un champ algébrique, on note LCF $\mathfrak{Sh}$ X la catégorie des faisceaux étales localement constants finis sur X : on sait que cette catégorie est galoisienne (theorème 1.7 et remarque 1.14) et qu'elle permet de calculer le groupe fondamental profini de X. Nous allons montrer qu'elle est équivalente à une catégorie dont les objets sont les revêtements étales de X.

Définition 3.1. — *La 2-catégorie* $\mathfrak{Rev}\, X$ *des revêtements d'un champ algébrique* X *est la sous-2-catégorie pleine de* $\mathfrak{Champs}/X$ *constituée des morphismes* $Y \longrightarrow X$ *étales finis.*

Théorème 3.2. — ***Soit*** X ***un champ algébrique. On a une équivalence de catégories***

$$\mathrm{LCF}\,\mathfrak{Sh}\; X \approx \mathfrak{Cat}\,\mathfrak{Rev}\; X.$$

Démonstration : D'après [V], on peut supposer que $X = [U/R]$, où $R \rightrightarrows U$ est un groupoïde étale dont la diagonale est quasi-compacte et séparée et on peut identifier les faisceaux étales sur X aux faisceaux équivariants sur ce groupoïde. Nous regarderons donc les objets de $\mathrm{LCF}\,\mathfrak{Sh}\; X$ comme des revêtements étales équivariants du groupoïde $R \rightrightarrows U$.

Considérons alors le foncteur

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{LCF}\,\mathfrak{Sh}\; X & \longrightarrow & \mathfrak{Cat}\,\mathfrak{Rev}\; X \\ F & & [F/R] \\ \Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \\ R \rightrightarrows U & & X. \end{array} \right.$$

(a) Montrons que le foncteur $\mathcal{F}$ est bien défini.

(a1) Le groupoïde $R \times F \rightrightarrows F$ est étale.

(a2) Montrons que sa diagonale $R \times F \rightrightarrows F$ est séparée : on a un carré commutatif (mais pas cartésien)

$$\begin{tikzcd} R \underset{U}{\times} F \arrow[r, "(\mathrm{pr}_2, \alpha)"] \arrow[d, "1\times f"'] & F \times F \arrow[d, "f\times f"] \\ R \arrow[r, "(s, b)"'] & U \times U, \end{tikzcd}$$

où $1 \times f$ et (s, b) sont séparés, donc $(f \times f) \circ (\mathrm{pr}_2, \alpha) = (s, b) \circ (1 \times f)$ est séparé, donc (pr_2, α) est séparé.

(a3) Montrons que la diagonale $R \times F \rightrightarrows F$ est quasi-compacte. Rappelons qu'un morphisme de schémas $\varphi : A \longrightarrow B$ est quasi-compact si et seulement s'il existe un recouvrement de B par des ouverts affines U_i et, pour tout i, un nombre fini d'ouverts affines $(V_{i,j})_{j \in J_i}$ de A qui recouvrent $\varphi^{-1}(U_i)$, *i.e.*, $\bigcup_{j \in J_i} V_{i,j} \supset \varphi^{-1}(U_i)$; c'est alors vrai pour n'importe quel recouvrement

$(U_i)_{i\in I}$ par des ouverts affines. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} R \underset{U}{\times} F \arrow[r, "(\mathrm{pr}_2,\alpha)"] \arrow[d, "1\times f"'] & F\times F \arrow[d, "f\times f"] \\ R \arrow[r, "(s,b)"'] & U\times U \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des revêtements étales et le morphisme du bas est quasi-compact. Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $U\times U$ par des ouverts affines et, pour chaque $i\in I$, un recouvrement $(R_{i,j})_{j\in J_i}$ de $(s,\,b)^{-1}(V_i)$ par un nombre fini d'ouverts affines. Comme $1\times f$ est quasi-compact, on peut recouvrir chaque $(1\times f)^{-1}(R_{ij})$ par un nombre fini d'ouverts affines $(W_{ijk})_{k\in K_{ij}}$. D'autre part, comme $f\times f : F\times F \longrightarrow U\times U$ est quasi-compact, on peut recouvrir chaque $(f\times f)^{-1}(V_i)$ par un nombre fini d'ouverts affines $(G_{il})_{l\in L_i}$. Dès lors, les $(W_{ijk})_{j\in J_i,\ k\in K_{ij}}$ sont des ouverts affines qui recouvrent chaque $(\mathrm{pr}_2,\,\alpha)^{-1}(G_{il})$.

(a4) D'après le lemme 3.6, on a un carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads, "\text{étale}"] \arrow[d, "\text{étale}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[F/R]} \arrow[d] \\ U \arrow[r, two heads, "\text{étale}"'] & {[U/R],} \end{tikzcd}$$

donc le morphisme $[F/R]\longrightarrow[U/R]$ est étale, quasi-fini et propre [DM, 4.11].

(b) Montrons que le foncteur $\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif. Soit $Y\longrightarrow X$ un morphisme étale et fini. Le morphisme $Y\times_X U\longrightarrow U$ est toujours étale et fini et on a un morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} (Y \underset{X}{\times} U) \underset{Y}{\times} (Y \underset{X}{\times} U) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & (Y \underset{X}{\times} U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ U \underset{X}{\times} U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

Mais comme

$$\begin{aligned} (Y \underset{X}{\times} U) \underset{Y}{\times} (Y \underset{X}{\times} U) &\simeq U \underset{X}{\times} (Y \underset{X}{\times} U) \\ &\simeq (U \underset{X}{\times} U) \underset{U}{\times} (Y \underset{X}{\times} U), \end{aligned}$$

on voit que la présentation de Y ainsi obtenue est de la forme requise : c'est un revêtement équivariant de $R\rightrightarrows U$.

(c) Pour montrer que le foncteur $\mathcal{F}$ est pleinement fidèle, soient F et G des revêtements équivariants du groupoïde $R \rightrightarrows U$. Montrons que l'application

$$\mathrm{Hom}_{R\rightrightarrows U}(F,\, G) \longrightarrow \mathfrak{hom}_{[U/R]}\big([F/R],\, [G/R]\big)/\text{isomorphismes}$$

est injective. Soient $\varphi,\ \ \psi : F \longrightarrow G$ deux morphismes équivariants et

$$\begin{tikzcd} {[F/R]} \arrow[r, bend left, "\varphi/R"] \arrow[r, bend right, "\psi/R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & {[G/R]} \end{tikzcd}$$

un isomorphisme entre leurs images. Si l'on prend la fibre de ces catégories fibrées au dessus de F, on obtient un isomorphisme

$$\begin{tikzcd} {[F/R]_F} \arrow[r, bend left, "(\varphi/R)_F"] \arrow[r, bend right, "(\psi/R)_F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_F"] & {[G/R]_F}. \end{tikzcd}$$

D'après la description des fibres d'un champ algébrique quotient [V], cela nous donne un isomorphisme

$$\underset{\substack{T\to F\\ \text{surjectif et étale}}}{\underrightarrow{2\text{-lim}}}\ \mathfrak{hom}\left(\begin{matrix} T\underset{F}{\times}T & & R\underset{U}{\times}F \\ \Downarrow & , & \Downarrow \\ T & & F \end{matrix}\right) \begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "(\varphi/R)_F"] \arrow[r, bend right, "(\psi/R)_F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_F"] & {} \end{tikzcd} \underset{\substack{T\to F\\ \text{surjectif et étale}}}{\underrightarrow{2\text{-lim}}}\ \mathfrak{hom}\left(\begin{matrix} T\underset{F}{\times}T & & R\underset{U}{\times}G \\ \Downarrow & , & \Downarrow \\ T & & G \end{matrix}\right)$$

La catégorie de gauche possède un objet particulier, correspondant au morphisme canonique $F \longrightarrow [F/R]$: regardons son image γ par α_F. C'est un 2-morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} T\underset{F}{\times}T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T \arrow[d] \arrow[ddl, "\gamma"] \\ R\underset{U}{\times}F \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ R\underset{U}{\times}G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G. \end{tikzcd}$$

Pour tout schéma W, on a donc un 2-morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(W,\,T) \underset{\mathrm{Hom}(W,F)}{\times} \mathrm{Hom}(W,\,T) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(W,\,T) \arrow[d] \arrow[ddl, "\mathrm{Hom}(W,\gamma)"'] \\
\mathrm{Hom}(W,\,R) \underset{\mathrm{Hom}(W,U)}{\times} \mathrm{Hom}(W,\,F) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{Hom}(W,\,F) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Hom}(W,\varphi)"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Hom}(W,\psi)"] \\
\mathrm{Hom}(W,\,R) \underset{\mathrm{Hom}(W,U)}{\times} \mathrm{Hom}(W,\,G) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Hom}(W,\,G).
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 3.4, on a donc $\mathrm{Hom}(W,\,\varphi) = \mathrm{Hom}(W,\,\psi)$ pour tout W, donc $\varphi = \psi$.

(d) Montrons que l'application

$$\mathrm{Hom}_{R \rightrightarrows U}(F,\,G) \longrightarrow \mathfrak{hom}_{[U/R]}\big([F/R],\,[G/R]\big)/\text{isomorphismes}$$

est surjective. Soit donc

$$\begin{tikzcd}
F/R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\Swarrow\alpha"] & G/R \arrow[dl] \\
& U/R &
\end{tikzcd}$$

un morphisme de champs au dessus de U/R. D'après le lemme 3.6, on a un carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F/R \arrow[d] \\
G \arrow[r] & G/R.
\end{tikzcd}$$

Comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \underset{F/R}{\times} F \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dotted] & F \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F/R \arrow[d, "\varphi"] \\
G \underset{G/R}{\times} G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G \arrow[r] & G/R,
\end{tikzcd}$$

il existe une flèche en pointillés (qui fasse tout commuter), à savoir

$$F \underset{F/R}{\times} F \longrightarrow F \underset{G/R}{\times} F \xrightarrow{\psi\times\psi} G \underset{G/R}{\times} G,$$

le morphisme $\psi : F \longrightarrow G$ est bien équivariant et son image est bien (isomorphe au) morphisme $(\varphi,\,\alpha)$ dont on est parti. $\square$

Remarque 3.3. — Soient $\mathfrak{U} = (R \rightrightarrows U)$ un groupoïde dans la catégorie des ensembles et $(F,\, \pi : F \longrightarrow U,\, \alpha : R \times_U F \longrightarrow F)$ un ensemble $\mathfrak{U}$-équivariant.

$$\begin{tikzcd} R \times_U F \arrow[r, "\alpha"] & F \arrow[d, "\pi"] \\ R \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "b"'] & U \end{tikzcd}$$

Cet objet équivariant définit un groupoïde $\mathfrak{F} = (R \times_U F \rightrightarrows F)$, dont les morphismes source, but, unité, inverse et multiplication sont respectivement pr_2, α,

$$e : \begin{cases} F & \longrightarrow & R \times_U F \\ f & \longmapsto & (\mathrm{Id}_{\pi(f)},\, f) \end{cases} \qquad i : \begin{cases} R \times_U F & \longrightarrow & R \times_U F \\ (\varphi,\, f) & \longmapsto & \big(\varphi^{-1},\, \alpha(\varphi,\, f)\big) \end{cases}$$

$$m : \begin{cases} (R \,{}_s\!\underset{U}{\times}_\pi F) \,{}_{\mathrm{pr}_2}\!\underset{F}{\times}_\alpha\, (R \,{}_s\!\underset{U}{\times}_\pi F) \xrightarrow{\ \sim\ } R \,{}_s\!\underset{U}{\times}_b R \,{}_s\!\underset{U}{\times}_\pi F \longrightarrow R \,{}_s\!\underset{U}{\times}_\pi F \\ \\ \big(\psi,\, \alpha(\varphi,\, f),\, \varphi,\, f\big) \longmapsto (\psi,\, \varphi,\, f) \longmapsto (\psi \circ \varphi,\, f). \end{cases}$$

On remarquera que $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{U}$ est un revêtement de groupoïdes, *i.e.*, pour tout objet $f \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{F}$, on a une bijection

$$\begin{cases} \{\ \text{flèches de } \mathfrak{F} \text{ partant de } f\ \} & \longrightarrow & \{\ \text{flèches de } \mathfrak{G} \text{ partant de } \pi(f)\ \} \\ f \xrightarrow{(\varphi,\, f)} \alpha(\varphi,\, f) & \longmapsto & \pi f \xrightarrow{\varphi} \pi\alpha(\varphi,\, f). \end{cases}$$

En particulier, le foncteur $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{U}$ est fidèle.

On remarquera aussi qu'un morphisme d'ensembles équivariants induit un morphisme de groupoïdes.

Lemme 3.4. — *Soient $\mathfrak{U} = (R \rightrightarrows U)$ un groupoïde (dans la catégorie des ensembles), F et G des ensembles $\mathfrak{U}$-équivariants, qui définissent des groupoïdes $\mathfrak{F} = (R \times_U F \rightrightarrows F)$ et $\mathfrak{G} = (R \times_U G \rightrightarrows G)$ comme dans la remarque précédente. Soient T un ensemble et $h : T \longrightarrow F$ une application, qui définit un groupoïde $\mathfrak{T} = (T \times_F T \rightrightarrows T)$ et un morphisme de groupoïdes, encore noté h, $\mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{F}$. Soient enfin φ et $\psi : F \longrightarrow G$ deux applications équivariantes. S'il existe un 2-morphisme de groupoïdes $\gamma : \varphi h \longrightarrow \psi h$*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{F} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \\ \mathfrak{T} \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathfrak{G} \\ & \mathfrak{F} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

tel que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{f} \arrow[dd, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathfrak{T} \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[ddr] & & \mathfrak{G} \arrow[ddl, "g"] \\
 & \mathfrak{f} \arrow[ur, "\psi"'] & \\
 & \mathfrak{U} &
\end{tikzcd}
$$

soit 2-commutatif, i.e., $g\gamma = \mathrm{Id}_{g\varphi h} = \mathrm{Id}_{g\psi h}$, *alors* $\varphi = \psi$ *et* $\gamma = \mathrm{Id}$.

Démonstration : La situation est la suivante.

$$
\begin{tikzcd}
 & & R \underset{U}{\times} G \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dddl] & & & G \arrow[dddl, "g"] \\
 & R \underset{F}{\times} U \arrow[ur, bend left] \arrow[ur, bend right] \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dd] & & & F \arrow[ur, bend left, "\varphi"] \arrow[ur, bend right, "\psi"'] \arrow[dd, "f"] & \\
T \underset{F}{\times} T \arrow[ur] \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dr] & & & T \arrow[uul, "\gamma"] \arrow[ur, "h"] \arrow[dr] & & \\
 & R \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] & & & U &
\end{tikzcd}
$$

On regarde T, G et F comme des catégories. Soit $x \in T$. Considérons le foncteur g et plus particulièrement l'application

$$
g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Hom}_G(\varphi hx,\, \psi hx) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_U(fhx,\, fhx) \\ (\alpha : \varphi hx \longrightarrow \psi hx) & \longmapsto & (g\alpha : fhx \longrightarrow fhx). \end{array} \right.
$$

En particulier, l'image de

$$\gamma_x : \varphi hx \longrightarrow \psi hx$$

est

$$g\gamma_x : fhx \longrightarrow fhx.$$

Mais comme $g\gamma = \mathrm{Id}$, on a $g\gamma_x = \mathrm{Id}_{fhx}$. D'autre part, comme le foncteur g est fidèle d'après la remarque 3.3, on a $\gamma_x = \mathrm{Id}_{\varphi hx}$ et $\varphi hx = \psi hx$. $\square$

Remarque 3.5. — En particulier, pour $T = F$ et $h = \mathrm{Id}$, le lemme nous dit que les seuls 2-morphismes de groupoïdes $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ au dessus de $\mathfrak{U}$ sont les identités.

Lemme 3.6. — *Soient X un champ algébrique, $R \rightrightarrows U$ une de ses présentations et $(F,\, \pi : F \longrightarrow U,\, \alpha : R \times_U F \longrightarrow F)$ un revêtement équivariant de $R \rightrightarrows U$. On a alors un carré 2-cartésien*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[F/R]} \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

Démonstration : (a) Commençons par démontrer que l'on a un tel carré 2-cartésien dans la 2-catégorie des groupoïdes si $R \rightrightarrows U$ est un groupoïde et F un ensemble équivariant. Le 2-produit-fibré $(F/R) \overset{2}{\times}{}_{U/R} U$ a pour objets

$$\Big\{\ (f,\, u,\, \gamma) \in F \times U \times R\ :\ \gamma \in \mathrm{Hom}\big(u,\, \pi(f)\big)\ \Big\}$$

et pour morphismes

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\big((f,\, u,\, \gamma),\, (f',\, u',\, \gamma')\big) \\
&\quad = \left\{\ (\varphi,\, \psi) \in \mathrm{Hom}(u,\, u') \times \mathrm{Hom}(f,\, f')\ :\ \begin{tikzcd} u \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi(f) \arrow[d, "\pi(\psi)"] \\ u' \arrow[r, "\gamma'"'] & \pi(f') \end{tikzcd}\ \right\} \\
&\quad = \Big\{\ (\varphi,\, \psi) \in \mathrm{Hom}(u,\, u') \times \mathrm{Hom}(f,\, f')\ :\ \varphi = \mathrm{Id}, \\
&\qquad\qquad \psi = (\chi,\, f) \in R \underset{U}{\times} F, \quad \alpha(\chi,\, f) = f' \ \text{ et }\ \chi\gamma = \gamma'\ \Big\} \\
&\quad = \Big\{\ \chi \in R\ :\ u = u', \quad s(\chi) = f, \quad \alpha(\chi,\, f) = f' \ \text{ et }\ \chi = \gamma'\gamma^{-1}\ \Big\} \\
&\quad = \begin{cases} * & \text{si } u = u', \quad \alpha(\gamma'\gamma^{-1},\, f) = f' \\ & \qquad (\text{et } s(\gamma'\gamma^{-1}) = \pi(f), \text{ mais c'est automatique}) \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit d'un ensemble muni d'une relation d'équivalence :

$$(f,\, u,\, \gamma) \sim (f',\, u',\, \gamma') \Longleftrightarrow \alpha(\gamma'\gamma^{-1},\, f) = f'.$$

On remarque que tout élément $(f,\, u,\, \gamma)$ est équivalent à un élément de la forme $(f',\, \pi(f'),\ \mathrm{Id})$:

$$(f,\, u,\, \gamma) \sim \big(\alpha(\gamma^{-1},\, f),\, \pi(\alpha(\gamma^{-1},\, f)),\ \mathrm{Id}\big).$$

D'autre part, deux élément de la forme $(f,\, \pi(f),\ \mathrm{Id})$ sont équivalents si et seulement s'ils sont égaux. On a donc

$$F/R \overset{2}{\underset{U/R}{\times}} U \approx F.$$

(b) On peut supposer $X = [U/R]$. Soit maintenant T un schéma. Nous allons montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} F_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & {[F/R]_T} \arrow[d] \\ U_T \arrow[r] & X_T \end{tikzcd}$$

est 2-cartésien en exhibant une équivalence de catégories

$$F_T \approx U_T \underset{[U/R]_T}{\times} [F/R]_T.$$

Mais d'après [V],

$$[U/R]_T = \underset{T' \twoheadrightarrow T}{\underrightarrow{2\text{-lim}}} [U/R]_{T' \twoheadrightarrow T}$$

$$\text{où } [U/R]_{T' \twoheadrightarrow T} = \mathfrak{hom}\begin{pmatrix} T' \underset{T}{\times} T' & & R \\ \Downarrow & , & \Downarrow \\ T' & & U \end{pmatrix}.$$

Nous allons donc simplement montrer que l'on a un carré 2-cartésien de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} F_{T' \twoheadrightarrow T} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & {[F/R]_{T' \twoheadrightarrow T}} \arrow[d] \\ U_{T' \twoheadrightarrow T} \arrow[r] & X_{T' \twoheadrightarrow T} \end{tikzcd}$$

où $F_{T' \twoheadrightarrow T}$ et $U_{T' \twoheadrightarrow T}$ sont des ensembles

Pour cela, il suffit de montrer que le groupoïde

$$G_1 = U_{T' \twoheadrightarrow T}/R_{T' \twoheadrightarrow T} \ :\quad \mathfrak{hom}\begin{pmatrix} T' \underset{T}{\times} T' & & R \\ \Downarrow & , & \Downarrow \\ T' & & R \end{pmatrix} \rightrightarrows \mathfrak{hom}\begin{pmatrix} T' \underset{T}{\times} T' & & U \\ \Downarrow & , & \Downarrow \\ T' & & U \end{pmatrix}$$

qui apparait dans (a) est équivalent à

$$G_2 = X_{T' \rightrightarrows T} = \mathfrak{hom} \left(\begin{array}{ccc} T' \underset{T}{\times} T' & & R \\ \downdownarrows & , & \downdownarrows \\ T' & & U \end{array} \right)$$

et d'appliquer (a).

À un objet du premier groupoïde, G_1, *i.e.*, à un morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\ U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd}$$

on associe un objet du second, G_2, par composition

$$\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\ U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U. \end{tikzcd}$$

Cette application (entre les ensembles d'objets de nos deux groupoïdes) est bijective car les seuls morphismes du groupoïde

$$T' \underset{T}{\times} T' \rightrightarrows T'$$

sont les identités et un morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd}$$

préserve les identités et se factorise donc par

$$\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\ U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U. \end{tikzcd}$$

Regardons maintenant les morphismes de nos groupoïdes.

$$\mathrm{Hom}_{G_1}\left(\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd} , \begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd}\right)$$

$$= \left\{ \begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & R \end{tikzcd} \text{ tels que } s\alpha = f \text{ et } b\alpha = g \right\}$$

$$= \left\{ \begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & R \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd} \text{ tels que } s\alpha = f \text{ et } b\alpha = g \right\}$$

$$= \left\{ \begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ R \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "b"'] & U \end{tikzcd} \text{ tels que } s\alpha = f \text{ et } b\alpha = g \right\}$$

$$= \mathrm{Hom}_{G_2}\left(\begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd} , \begin{tikzcd} T' \underset{T}{\times} T' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[d, "g"] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \end{tikzcd}\right)$$

□

4 Théorème de Van Kampen

Nous rappelons le théorème de Van Kampen tel qu'il est présenté dans [G] ou [SGA1, IV.5], avant de le traduire dans un langage plus concret en termes de carré cocartésien de progroupoïdes.

Définition 4.1. — *Soit $\mathcal{F} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ une catégorie fibrée et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathfrak{C}$. On note p_i et p_{ij} les différentes projections :*

$$\begin{tikzcd} X \underset{Y}{\times} X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, bend left, "p_{12}"] \arrow[r, "p_{13}"] \arrow[r, bend right, "p_{23}"'] & X \underset{Y}{\times} X \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y. \end{tikzcd}$$

*La **catégorie des données de descente** pour $\mathcal{F}$ relatives à φ, notée $\mathfrak{Desc}\,\varphi$, a pour objets les $(F,\,\alpha)$, où $F \in \operatorname{Ob}\mathfrak{f}_X$ est un objet de $\mathfrak{f}$ au dessus de X et $\alpha : p_1^*F \longrightarrow p_2^*F$ est un isomorphisme au dessus de $\mathrm{Id}_{X\times_Y X}$ tel que*

$$\begin{tikzcd}
 & p_{12}^*p_2^*F \arrow[r, phantom, "\simeq"] & p_{23}^*p_1^*F \arrow[dr, "p_{23}^*\alpha"] & \\
p_{12}^*p_1^*F \arrow[ur, "p_{12}^*\alpha"] \arrow[dr, equal] & & & p_{23}^*p_2^*F \arrow[dl, equal] \\
 & p_{13}^*p_1^*F \arrow[r, "p_{13}^*\alpha"'] & p_{13}^*p_2^*F &
\end{tikzcd}$$

et dont les morphismes $(F,\,\alpha) \longrightarrow (F',\,\alpha')$ sont les morphismes $f : F \longrightarrow F'$ dans $\mathfrak{f}_X$ tels que

$$\begin{tikzcd}
p_1^*F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p_1^*f"'] & p_2^*F \arrow[d, "p_2^*f"] \\
p_1^*F' \arrow[r, "\alpha'"'] & p_2^*F'.
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.2. — Soit $F : \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{C}$ une catégorie fibrée et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathfrak{C}$. D'après [SGA1, IV.5], on a une équivalence de catégories

$$\mathfrak{Desc}\,\varphi \approx \underleftarrow{2\text{-}\lim}\left(\mathfrak{f}_X \rightrightarrows \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow} \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X\underset{Y}{\times}X}\right)$$

où le 2-système projectif est défini par :

(*i*) trois catégories $\mathfrak{f}_X$, $\mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X}$ et $\mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X\underset{Y}{\times}X}$;

(*ii*) des foncteurs entre ces catégories

$$\mathfrak{f}_X \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \overset{p_{ij}^*}{\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}} \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X\underset{Y}{\times}X};$$

(*iii*) des 2-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \arrow[dr, "p_{12}^*"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \\
\mathfrak{f}_X \arrow[ur, "p_1^*"] \arrow[dr, "p_2^*"'] & & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X\underset{Y}{\times}X} \\
 & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \arrow[ur, "p_{13}^*"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \arrow[dr, "p_{12}^*"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \\
\mathfrak{f}_X \arrow[ur, "p_1^*"] \arrow[dr, "p_2^*"'] & & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X\underset{Y}{\times}X} \\
 & \mathfrak{f}_{X\underset{Y}{\times}X} \arrow[ur, "p_{23}^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{F}_{X \underset{Y}{\times} X} \arrow[dd, Rightarrow, "\theta_3"] \arrow[dr, "p_{13}^*"] & \\
\mathfrak{F}_X \arrow[ur, "p_1^*"] \arrow[dr, "p_2^*"'] & & \mathfrak{F}_{X \underset{Y}{\times} X \underset{Y}{\times} X} \\
& \mathfrak{F}_{X \underset{Y}{\times} X}. \arrow[ur, "p_{23}^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Définition 4.3. — *Soit $\mathcal{F} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ une catégorie fibrée. On dit qu'un morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{C}$ est un **morphisme de descente effective** si le foncteur*

$$
\left\{ \begin{array}{ccl} \mathfrak{F}_X & \longrightarrow & \mathfrak{Desc}\,\varphi \\ F & \longmapsto & (\varphi^* F,\ \ p_1^*\varphi^* F \longrightarrow (p_1\varphi)^* F = (p_2\varphi)^* F \longrightarrow p_2^*\varphi^* F) \end{array} \right.
$$

est une équivalence de catégories.

Théorème 4.4. — ***Un morphisme couvrant $\varphi : X \longrightarrow *$ dans un topos $\mathscr{T}$ est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée associée au pseudo-foncteur***

$$
\left\{ \begin{array}{ccl} \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathfrak{Cat} \\ T & \longmapsto & \mathscr{T}/T \\ f & \longmapsto & f^*. \end{array} \right.
$$

Démonstration : Voir [G]. □

Corollaire 4.5. — *Un morphisme couvrant $\varphi : X \longrightarrow *$ dans un topos $\mathscr{T}$ est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée associée au pseudo-foncteur*

$$
\left\{ \begin{array}{ccl} \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathfrak{Cat} \\ T & \longmapsto & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/T \\ f & \longmapsto & f^* \end{array} \right. \qquad \textit{respectivement} \qquad \left\{ \begin{array}{ccl} \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathfrak{Cat} \\ T & \longmapsto & \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}/T \\ f & \longmapsto & f^*. \end{array} \right.
$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SLC}\,\mathscr{T})/X &\simeq \mathrm{SLC}(\mathscr{T}/X) \\
&\simeq \mathrm{SLC}\,\mathfrak{Desc}(\varphi,\ \mathscr{T}/\cdot) \\
&\simeq \mathfrak{Desc}(\varphi,\ \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/\cdot)
\end{aligned}
$$

et de procéder de même pour le cas de SLCF. □

Proposition 4.6. — *Soit $\mathscr{T}$ un topos, U et V des objets de $\mathscr{T}$ tels que $\varphi : U \amalg V \longrightarrow *$ soit couvrant et que $U \times U \simeq U$ et $V \times V \simeq V$. On a alors un carré 2-cartésien de catégories et de foncteurs « image réciproque » de topos,*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{T}/U \arrow[d] \\ \mathscr{T}/V \arrow[r] & \mathscr{T}/U \times V. \end{tikzcd}$$

Démonstration : On sait déjà que $\mathscr{T} \approx \mathfrak{Desc}\,\varphi$: nous allons expliciter la catégorie $\mathfrak{Desc}\,\varphi$ des données de descente et voir que cette description est la même que celle du 2-produit fibré $\mathscr{T}/U \times_{\mathscr{T}/U\times V} \mathscr{T}/V$: on pourra alors conclure grace au théorème 4.4. Une donnée de descente relative à f est la donnée de

- Un objet de $\mathscr{T}/U \amalg V$, que l'on peut écrire $F \amalg G$, où F et G sont des objets de $\mathscr{T}/U$ et $\mathscr{T}/V$ respectivement ;
- Un isomorphisme $\theta : p_1^*(F \amalg G) \longrightarrow p_2^*(F \amalg G)$ tel que

$$\begin{tikzcd} & q_2^*(F \amalg G) \arrow[dr, "p_{23}^*\theta"] & \\ q_1^*(F \amalg G) \arrow[ur, "p_{12}^*\theta"] \arrow[rr, "p_{13}^*\theta"'] & & q_3^*(F \amalg G). \end{tikzcd}$$

Or, on peut écrire θ sous la forme

$$F|_{U\times U} \amalg F|_{U\times V} \amalg G|_{U\times V} \amalg G|_{V\times V} \longrightarrow F \amalg G|_{U\times V} \amalg F|_{U\times V} \amalg G,$$

i.e., puisque $F|_{U\times U} = F|_U = F$ et $G|_{V\times V} = G|_V = G$,

$$F \amalg F|_{U\times V} \amalg G|_{U\times V} \amalg G \longrightarrow F \amalg G|_{U\times V} \amalg F|_{U\times V} \amalg G.$$

Une donnée de descente est donc la donnée d'isomorphismes

$$F \xrightarrow{\alpha} F, \qquad F|_{U\times V} \xrightarrow{\beta} G|_{U\times V}$$

$$G \xrightarrow{\delta} G, \qquad G|_{U\times V} \xrightarrow{\gamma} F|_{U\times V}\,;$$

tels que

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "\alpha"] & \\ F \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & F \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "\delta"] & \\ G \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\delta"'] & & G \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & G|_{U\times V} \arrow[dr, "\gamma"] & \\ F|_{U\times V} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & F|_{U\times V}, \end{tikzcd}$$

i.e., $\alpha = \mathrm{Id}$, $\delta = \mathrm{Id}$, $\gamma = \beta^{-1}$. On expliciterait de même les morphismes de données de descente. En définitive, la catégorie des données de descente est équivalente à la catégorie des $(F,\, G,\, \beta)$, où F et G sont des objets de $\mathscr{T}/U$ et $\mathscr{T}/V$ et β est un isomorphisme $F|_{U\times V} \longrightarrow G|_{U\times V}$: c'est exactement la description du 2-produit fibré $\mathscr{T}_U \underset{\mathscr{T}/U\times V}{\times} \mathscr{T}/V$. □

Corollaire 4.7. — *Soit $\mathscr{T}$ un topos, U et V des objets de $\mathscr{T}$ tels que $\varphi : U \amalg V \longrightarrow *$ soit couvrant et que $U \times U \simeq U$ et $V \times V \simeq V$. On a alors un carré 2-cartésien de catégories et de morphismes image réciproque de topos,*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/U \arrow[d] \\ \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/V \arrow[r] & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/U\times V. \end{tikzcd}$$

Démonstration : Comme $\mathrm{SLC}(\mathscr{T}/X) = (\mathrm{SLC}\,\mathscr{T})/X$, il suffit d'apliquer le résultat précédent à $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$. □

Corollaire 4.8. — *Soit $\mathscr{T}$ un topos, U et V des objets de $\mathscr{T}$ tels que $\varphi : U \amalg V \longrightarrow *$ soit couvrant et que $U \times U \simeq U$ et $V \times V \simeq V$. Soient*

- *$P_{U\times V}$ un ensemble de points-bases de $\mathscr{T}/U \times V$, au moins un dans chaque composante connexe ;*
- *P_U un ensemble de points-bases de $\mathscr{T}/U$, comprenant les images des éléments de $P_{U\times V}$, avec au moins un point dans chaque composante connexe ;*
- *P_V un ensemble de points-bases de $\mathscr{T}/V$, comprenant les images des éléments de $P_{U\times V}$, avec au moins un point dans chaque composante connexe ;*
- *P un ensemble de points-bases de $\mathscr{T}$ comprenant les images des éléments de P_U et P_V avec au moins un point dans chaque composante connexe.*

On a alors un carré 2-cocartesien de progroupoïdes fondamentaux,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathscr{T},\ P) \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \pi_1(\mathscr{T}/U,\ P_U) \arrow[l] \\ \pi_1(\mathscr{T}/V,\ P_V) \arrow[u] & \pi_1(\mathscr{T}/U\times V,\ P_{U\times V}). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Démonstration : On a un carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/U \arrow[d] \\
\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/V \arrow[r] & \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/U \times V,
\end{tikzcd}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}\pi_1\mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathfrak{B}\pi_1 U \arrow[d] \\
\mathfrak{B}\pi_1 V \arrow[r] & \mathfrak{B}\pi_1(U \times V)
\end{tikzcd}$$

où, pour simplifier, on a noté

$$\begin{aligned}
\pi_1\mathscr{T} &= \pi_1(\mathscr{T},\, P) \\
\pi_1 U &= \pi_1(\mathscr{T}/U,\, P_U) \\
\pi_1 V &= \pi_1(\mathscr{T}/V,\, P_V) \\
\pi_1(U \times V) &= \pi_1(\mathscr{T}/U \times V,\, P_{U\times V}).
\end{aligned}$$

D'après les choix de points-bases que l'on a effectués, ces morphismes proviennent de morphismes de groupoïdes

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\mathscr{T} & \pi_1 U \arrow[l] \\
\pi_1 V \arrow[u] & \pi_1(U \times V). \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Remarquons que, pour tout groupe π, on a $\mathfrak{B}\pi \approx \mathfrak{hom}(\pi,\, \mathfrak{Ens})$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\left(\pi_1 U \underset{\pi_1(U\times V)}{\overset{2}{*}} \pi_1 V\right) &\approx \mathfrak{hom}(\pi_1 U \underset{\pi_1(U\times V)}{\overset{2}{*}} \pi_1 V,\;\; \mathfrak{Ens}) \\
&\approx \mathfrak{hom}(\pi_1 U,\;\; \mathfrak{Ens}) \underset{\mathfrak{hom}\left(\pi_1(U\times V),\;\, \mathfrak{Ens}\right)}{\overset{2}{\times}} \mathfrak{hom}(\pi_1 V,\;\; \mathfrak{Ens}) \\
&\approx \mathfrak{B}\pi_1 U \underset{\mathfrak{B}\pi_1(U\times V)}{\overset{2}{\times}} \mathfrak{B}\pi_1 V \\
&\approx \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \\
&\approx \mathfrak{B}\pi_1\mathscr{T}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\pi_1(\mathscr{T},\;\; P) \approx \pi_1(\mathscr{T}/U,\;\; P_U) \underset{\pi_1(\mathscr{T}/U\times V,\;\, P_{U\times V})}{\overset{2}{*}} \pi_1(\mathscr{T}/V,\;\; P_V). \qquad \square$$

Nous allons maintenant voir que dans certains cas, cette 2-somme amalgamée peut se calculer comme une 1-somme amalgamée.

Lemme 4.9. — *Soient des morphismes de groupoïdes*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

qui établissent des bijections entre les ensembles d'objets. La somme amagamée $A *_C B$ est aussi une 2-somme amalgamée.

Démonstration : Nous allons montrer que $A *_C B$ vérifie la propriété 2-universelle d'une 2-somme amalgamée. Considérons une présentation de chacun de ces groupoïdes

$$\begin{aligned} A &= \big\langle (a_i)_{i\in I}; (r_i)_{i\in I'} \big\rangle \\ B &= \big\langle (b_j)_{j\in J}; (s_i)_{i\in J'} \big\rangle \\ C &= \big\langle (c_k)_{k\in K}; (t_i)_{i\in K'} \big\rangle \\ A \underset{C}{*} B &= \Big\langle (a_i)_{i\in I},\ (b_j)_{j\in J}; (r_i)_{i\in I'},\ (s_j)_{j\in J'},\ \big(a(c_k)b(c_k)^{-1}\big)_{k\in K} \Big\rangle \end{aligned}$$

et un carré 2-commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & D. \end{tikzcd}$$

Montrons qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "a'"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "b'"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \underset{C}{*} B \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow \beta'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \alpha'"] & \\ & & D. \end{tikzcd}$$

On peut définir le morphisme h par

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) && \text{si } x \in \operatorname{Ob} C = \operatorname{Ob} A \\ h(a_i) &= f(a_i) && \text{si } i \in I \\ h(b_j : x \longrightarrow y) &= \alpha_y g(b_j) \alpha_x^{-1} && \text{si } j \in J. \end{aligned}$$

C'est bien défini, car les relations $h(r_i) = \mathrm{Id}$ (pour $i \in I'$) et $h(s_j) = \mathrm{Id}$ (pour $j \in J'$) sont vérifiées car elles le sont dans A ou B et les relations $h(a(c_k)) = h(b(c_k))$ (pour $k \in K'$) sont vérifiées car α est une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "c_k"'] & g(x) \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[d, "gbc_k"'] & fx \arrow[d, "fac_k"] \\ y & gy \arrow[r, "\alpha y"'] & fy. \end{tikzcd}$$

On peut définir α' et β' par $\beta' = \mathrm{Id}$ et $\alpha'_x = \alpha_x$ (pour $x \in \mathrm{Ob}\, B = \mathrm{Ob}\, C$). On obtient bien un diagramme 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} gb \arrow[r, "\alpha' b"] \arrow[d, "\alpha"'] & hb'b \arrow[d, equal] \\ ha & ha'a. \arrow[l, "\beta' a"] \end{tikzcd}$$

Considérons un autre diagramme 2-commutatif (h', β, γ),

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "a'"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "b'"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \underset{C}{*} B \arrow[dr, dotted, "h'"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow\gamma"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\beta"] & \\ & & D. \end{tikzcd}$$

On veut montrer qu'il existe un unique

$$\begin{tikzcd} A \underset{C}{*} B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\delta"] & D \end{tikzcd}$$

tel que

$$\begin{tikzcd} ha' \arrow[r, "\delta a'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & h'a' \arrow[d, "\gamma"] \\ & f \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} g \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & hb' \arrow[d, "\delta b'"] \\ & h'b' \end{tikzcd} \quad \text{commutent.}$$

Si un tel δ existe, on a nécessairement, pour tout objet x de A, $\gamma_x \circ \delta_{a'x} = \mathrm{Id}_x$, *i.e.*, $\delta_{a'x} = \gamma_x^{-1}$; or, comme a' est une bijection sur les objets, on peut identifier x et $a'x$ et écrire

$$\delta_x = \gamma_x^{-1}.$$

Ceci montre que δ est unique. Vérifions que δ, ainsi défini, est une transformation naturelle : il s'agit de montrer que pour tout morphisme $\varphi : x \longrightarrow y$ de $A *_C B$, on a

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "\varphi"'] \\ y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} hx \arrow[r, "\delta x"] \arrow[d, "h\varphi"'] & h'x \arrow[d, "h'\varphi"] \\ hy \arrow[r, "\delta y"'] & h'y \end{tikzcd} \qquad i.e., \qquad \begin{tikzcd} fx \arrow[d, "h\varphi"'] & h'x \arrow[l, "\gamma x"'] \arrow[d, "h'\varphi"] \\ fy & h'y. \arrow[l, "\gamma y"] \end{tikzcd}$$

Il suffit de l'établir pour les générateurs a_i et b_j de $A *_C B$. D'une part, on a bien

$$\begin{tikzcd} fx \arrow[d, "fa_i"'] & h'x = h'a'x \arrow[l, "\gamma x"'] \arrow[d, "h'a_i = h'a'a_i"] \\ fy & h'y = h'a'y \arrow[l, "\gamma y"] \end{tikzcd}$$

car γ est une transformation naturelle. D'autre part, comme le diagramme (h', β, γ) est 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} gbx \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[d, "\beta bx"'] & fax \\ h'b'bx \arrow[r, equal] & h'a'ax, \arrow[u, "\gamma_{ax}"'] \end{tikzcd}$$

et comme β est une transformation naturelle, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} gbx \arrow[r, "\beta bx"] \arrow[d, "gb_j"'] & h'b'bx \arrow[d, "h'b_j"] \\ gby \arrow[r, "\beta by"'] & h'b'by, \end{tikzcd}$$

on a bien

$$\begin{tikzcd} gbx \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[d, "gb_j"'] & fax & h'a'ax \arrow[l, "\gamma a'x"'] \arrow[r, equal] & h'b'bx \arrow[d, "h'b_j"] \\ gby \arrow[r, "\alpha y"'] & fay & h'a'ay \arrow[l, "\gamma a'y"] \arrow[r, equal] & h'b'by. \end{tikzcd}$$

Par conséquent, γ est bien une transformation naturelle. Enfin, on a

$$\begin{tikzcd} ha' \arrow[r, "\delta a'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & h'a' \arrow[d, "\gamma"] \\ & f \end{tikzcd}$$

par définition de δ et montrer

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & hb' \arrow[d, "\delta b'"] \\ & h'b' \end{tikzcd}$$

se ramène à établir

$$\begin{tikzcd} gx \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[drr, "\beta x"'] & hb'x \arrow[r, equal] & ha'x \arrow[r, equal] & fx \\ & & h'b'x \arrow[r, equal] & h'ax \arrow[u, "\gamma x"'] \end{tikzcd}$$

qui n'est autre que la 2-commutativité du diagramme (h', β, γ). $\square$

Remarque 4.10. — Le même résultat s'étend à des *pro*groupoïdes : on peut écrire $A = \text{“}\varprojlim\text{”}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $B = \text{“}\varprojlim\text{”}_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ et $C = \text{“}\varprojlim\text{”}_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ et reprendre la même démonstration, en rajoutant « pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ », « pour $\lambda \geqslant \lambda_1$ » ou « pour $\lambda \geqslant \sup\{\, \lambda_0, \lambda_1 \,\}$ » un peu partout.

Corollaire 4.11. — *Soient $\mathscr{T}$ un topos localement connexe, U et V des objets tels que $U \amalg V \longrightarrow *$ soit un épimorphisme et tels que $U \times U \simeq U$ et $V \times V \simeq V$. Soit $P = (p_i : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLC}\, \mathscr{T})_{i \in I}$ un ensemble de points-bases de $U \times V$, tel qu'il y ait au moins un point dans chaque composante connexe de $U \times V$, U, V et $*$. On a alors un carré cocartésien de groupoïdes fondamentaux*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathscr{T}/U \times V,\, P) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathscr{T}/U,\, P) \arrow[d] \\ \pi_1(\mathscr{T}/V,\, P) \arrow[r] & \pi_1(\mathscr{T},\, P). \end{tikzcd}$$

5 Théorème de Van Kampen pour les champs algébriques

Nous allons maintenant appliquer le corollaire 4.11 au topos $\mathfrak{Sh}\, X$ des faisceaux étales sur un champ algébrique X.

Théorème 5.1. — ***Soient** X **un champ algébrique,** U **et** V **des sous-champs ouverts tels que** $X = U \cup V$ **et** $P = (p_i : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\, \mathfrak{Sh}\, X)_{i \in I}$*

un ensemble de points-bases de $U \overset{2}{\times}{}_X V$, avec au moins un point dans chaque composante connexe de $U \overset{2}{\times}{}_X V$, U, V et X. On a alors un carré cocartésien de progroupoïdes,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, P) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, P) \arrow[d, hook] \\
\pi_1(V, P) \arrow[r] & \pi_1(X, P).
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Comme $U \longrightarrow X$ est un sous-champ ouvert, c'est un objet de $X'_{\text{ét}}$, auquel correspond un préfaisceau représentable $\widetilde{U}$, objet de $\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}$.

Montrons que $\widetilde{U} \times \widetilde{U} \simeq \widetilde{U}$ dans $\mathfrak{Sh}\ X$. D'après le lemme 5.2, on a

$$U \underset{X}{\overset{2}{\times}} U \approx U \quad \text{dans } \mathfrak{Champs}$$

donc, d'après le lemme 2.4,

$$U \overset{2}{\times} U \approx U \quad \text{dans } \mathfrak{Champs}/X$$

donc, d'après le lemme 2.2,

$$U \times U \simeq U \quad \text{dans } \mathfrak{Cat}(\mathfrak{Champs}/X).$$

Or, $X'_{\text{ét}}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}(\mathfrak{Champs}/X)$, donc

$$U \times U \simeq U \quad \text{dans } X'_{\text{ét}}$$

donc

$$\widetilde{U \times U} \simeq \widetilde{U} \quad \text{dans } \mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}$$

donc (puisque le plongement d'Yoneda est exact à gauche),

$$\widetilde{U} \times \widetilde{U} \simeq \widetilde{U} \quad \text{dans } \mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}.$$

On peut maintenant appliquer le corollaire 4.11 au topos $\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}$ et aux objets $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ qui vérifient bien $\widetilde{U} \times \widetilde{U} \simeq \widetilde{U}$ et $\widetilde{V} \times \widetilde{V} \simeq \widetilde{V}$ et $\widetilde{U} \amalg \widetilde{V} \longrightarrow *$ est un épimorphisme (car la famille $(U \longrightarrow *, V \longrightarrow *)$ est couvrante, donc $(\widetilde{U} \longrightarrow *, \widetilde{V} \longrightarrow *)$ aussi). On a donc un carré cocartésien de progroupoïdes

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{U} \times \widetilde{V}, P) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{U}, P) \arrow[d, hook] \\
\pi_1(\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{V}, P) \arrow[r] & \pi_1(\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}, P)
\end{tikzcd}$$

Les lemmes 5.3 et 5.4 montrent que $\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{U} \approx \mathfrak{Sh}\ U'_{\text{ét}}$ et $\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{V} \approx \mathfrak{Sh}\ V'_{\text{ét}}$; d'autre part, d'après les lemmes 2.4 et 2.2 et comme le plongement d'Yoneda est exact à gauche,

$$\widetilde{U} \times \widetilde{V} \approx \widetilde{U \overset{2}{\underset{X}{\times}} V},$$

donc

$$\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{U} \times \widetilde{V} \approx \mathfrak{Sh}\ (U \overset{2}{\underset{X}{\times}} V)'_{\text{ét}}.$$

Finalement, on a un carré cocartésien de progroupoïdes

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathfrak{Sh}\ (U \overset{2}{\underset{X}{\times}} V)'_{\text{ét}},\ P) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathfrak{Sh}\ U'_{\text{ét}},\ P) \arrow[d] \\ \pi_1(\mathfrak{Sh}\ V'_{\text{ét}},\ P) \arrow[r] & \pi_1(\mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}},\ P). \end{tikzcd}$$

□

Lemme 5.2. — *Si $i : U \hookrightarrow X$ est un sous-champ d'un champ algébrique, alors $U \approx U \overset{2}{\underset{X}{\times}} U$.*

Démonstration : Le sous-champ $i : U \hookrightarrow X$ est une sous-catégorie fibrée. La fibre au dessus d'un schéma T de la catégorie fibrée $U \overset{2}{\times}_X U$ a pour objets les $(f,\ g,\ \alpha)$, où $f \in U(T)$, $g \in U(T)$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_{X(T)}(if,\ ig) = \mathrm{Hom}_{U(T)}(f,\ g)$, *i.e.*, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & U, \end{tikzcd}$$

et les morphismes $(f,\ g,\ \alpha) \longrightarrow (f',\ g',\ \alpha')$ sont les $(\varphi,\ \psi)$ où

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "\varphi"'] & if \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i\varphi"'] & ig \arrow[d, "i\psi"] & g \arrow[d, "\psi"] \\ f' & if' \arrow[r, "\alpha'"'] & ig' & g'. \end{tikzcd}$$

Mais tout $(f,\ g,\ \alpha)$ est isomorphe à $(f,\ \mathrm{Id}_f,\ f)$:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "\mathrm{Id}_f"'] & f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_f"'] & g \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & g \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\ f & f \arrow[r, "\mathrm{Id}_f"'] & f & f. \end{tikzcd}$$

D'autre part les morphismes $(f,\ f,\ \mathrm{Id}) \longrightarrow (g,\ g,\ \mathrm{Id})$ sont les $(\varphi,\ \psi)$ tels que

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "\varphi"'] \\ g \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\varphi"'] & f \arrow[d, "\psi"] \\ g \arrow[r, "\mathrm{Id}_g"'] & g \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[d, "\psi"] \\ g, \end{tikzcd}$$

i.e., tels que $\varphi = \psi$. Cela donne une équivalence de catégories

$$U_T \longrightarrow \left(U \overset{2}{\underset{X}{\times}} U\right)_T .$$

$\square$

Lemme 5.3. — *Si $U \hookrightarrow X$ est un sous-champ, on a une équivalence de sites $X'_{\text{ét}}/U \approx U'_{\text{ét}}$.*

Démonstration : (a) Les objets de $U'_{\text{ét}}$ sont les $t : T \longrightarrow U$ et les morphismes $(T,\ t) \longrightarrow (T',\ t')$ sont les $(f : T \longrightarrow T',\ \alpha : t'f \longrightarrow t)$,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "t'"] \\ & U, & \end{tikzcd}$$

modulo les $\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & T' \end{tikzcd}$ tels que $\begin{tikzcd} t'f \arrow[r, "t'\theta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & t'f' \arrow[d, "\alpha'"] \\ & t. \end{tikzcd}$

(b) Les objets de $X'_{\text{ét}}/U$ sont les $(T,\ s : T \longrightarrow X,\ t : T \longrightarrow U,\ \beta : ut \longrightarrow s)$,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\beta"] & U \arrow[dl, "u"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

modulo les $\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "t"] \arrow[r, bend right, "t'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & U \end{tikzcd}$ tels que $\begin{tikzcd} s't \arrow[r, "s'\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & s't' \arrow[d, "\beta'"] \\ & s \end{tikzcd}$ et les morphismes $(T,\ s,\ t,\ \beta) \longrightarrow$

$(T',\, s',\, t',\, \beta')$ sont les $(f : T \longrightarrow T',\ \alpha : t'f \longrightarrow t,\ \gamma : s'f \longrightarrow s)$ tels que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\gamma"] & T' \arrow[dl, "s'"] \\ & X & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[ddl, bend left, "s'"] \\ \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\beta"] & U \arrow[d, "u"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow\beta'"] & {} \\ & X, & \end{tikzcd} \qquad i.e., \qquad \gamma = \beta\alpha\beta^{-1}$$

modulo les $\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & T' \end{tikzcd}$ tels que $\begin{tikzcd} s'f \arrow[r, "s'\theta"] \arrow[dr, "\beta"'] & s'f \arrow[d, "\beta'"] \\ & s \end{tikzcd}$ et modulo un choix différent de α.

(c) Nous allons montrer que le foncteur suivant est une équivalence de catégories.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & U'_{\text{ét}} \longrightarrow & X'_{\text{ét}}/U \\ & \begin{tikzcd} T \arrow[d, "t"] \\ U \end{tikzcd} \longmapsto & \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "ut"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \arrow[dl, "u"] \\ & X & \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "t'"] \\ & U & \end{tikzcd} & \longmapsto & \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"] \arrow[ddr, bend right, "ut"'] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[ddl, bend left, "ut'"] \\ \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & U \arrow[d, "u"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\ & X & \end{tikzcd} \end{array} \right.$$

(d) Il est essentiellement surjectif, car tout objet $(T,\, s,\, t,\, \beta)$ est isomorphe à un objet de la forme $(T,\, ut,\, t,\ \mathrm{Id})$ par l'isomorphisme

$$(T,\, s,\, t,\, \beta) \xrightarrow{(\mathrm{Id},\, \mathrm{Id},\, \beta)} (T,\, ut,\, t,\ \mathrm{Id}).$$

(e) Montrons maintenant qu'il est pleinement fidèle. Soient donc $(T,\, t)$ et $(T',\, t')$ des objets de $U'_{\text{ét}}$. Montrons que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\big((T,\, t),\, (T',\, t')\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\big((T,\, ut,\, u,\ \mathrm{Id}),\, (T,\, ut',\, u,\ \mathrm{Id})\big) \\ (f,\, \alpha) & \longmapsto & (f,\, \alpha,\, u\alpha) \end{array} \right.$$

est bijective. La surjectivité est imédiate, car tout morphisme $(f,\, \alpha,\, \gamma)$ est l'image du morphisme $(f,\, \alpha)$, car γ s'exprime en fonction de f et α. Pour l'injectivité, il suffit de remarquer que α est entièrement déterminé par la donnée de f et $u\alpha$: si

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & T' \arrow[dl] \\
& U \arrow[d, "u"] & \\
& X &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha'}{\Leftarrow}"] & T' \arrow[dl] \\
& U \arrow[d, "u"] & \\
& X, &
\end{tikzcd}
$$

alors $\alpha = \alpha'$, car le foncteur $\mathfrak{hom}(T, U) \longrightarrow \mathfrak{hom}(T, X)$ est pleinement fidèle, car U est un sous-champ.

(f) Enfin, il s'agit d'une équivalence de sites, car les topologies sont définies de la même manière : les familles étales surjectives (ce sont les mêmes dans $X'_{\text{ét}}/U$ et $U'_{\text{ét}}$) sont décrétées couvrantes. $\square$

Lemme 5.4. — *Soit $U \longrightarrow X$ un sous-champ ouvert et $\widetilde{U}$ le faisceau étale sur X correspondant. On a une équivalence de catégories $\mathfrak{Sh}\ X_{\text{ét}}/\widetilde{U} \approx \mathfrak{Sh}\ U_{\text{ét}}$.*

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Sh}\ X_{\text{ét}}/\widetilde{U} &\approx \mathfrak{Sh}\ X'_{\text{ét}}/\widetilde{U} && \text{d'après le lemme 1.12} \\
&\approx \mathfrak{Sh}(X'_{\text{ét}}/U) && \text{d'après [SGA4, III.5.4]} \\
&\approx \mathfrak{Sh}\ U'_{\text{ét}} && \text{d'après le lemme 5.3} \\
&\approx \mathfrak{Sh}\ U_{\text{ét}} && \text{d'après le lemme 1.12.}
\end{aligned}
$$

$\square$

Références

[B] R. Brown, *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Chichester, 1988.

[DM] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES, **36**, 1969, 75–109.

[F] E. Friedlander, *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Math. Studies, **104**, Princeton University Press, 1982.

[G] J. Giraud, *Théorie de la descente*, Mémoires de la société mathématique de France, **2**, 1964.

[H] A. Haefliger, *Groupes d'holonomie et classifiants*, Astérisque, **116**, 1984, 70–107.

[LM] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **39**, Springer Verlag, 2000.

[L] O. Leroy, *Groupoïde fondamental et théorème de Van Kampen dans les topos*, Cahiers mathématiques de l'université de Montpelier, 1979.

[MT] L. Mauri and M. Tierney, *Two-descent, two-torsors and local equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra, **143**, 1999, 313–327.

[M_1] I. Moerdijk, *Prodiscrete groups and galois toposes*, Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. series A, **92**, 1089, 219–235.

[M_2] I. Moerdijk, *Classifying spaces and classifying toposes*, LNM, **1616**, Springer Verlag, 1995.

[MP] I. Moerdijk and D. Pronk, *Orbifolds, sheaves and groupoids*, K-theory, **12**, 1997, 3–21.

[O] T. Oda, *Étale homotopy type of the moduli space of algebraic curves*, in *Geometric Galois actions*, L. Schneps and P. Lochak editor, London Mathematical Society, Lecture Notes Series, **242**, Cambridge University Press, 1997, 85–95.

[P] D. Pronk, *Groupoid representations for sheaves on orbifolds*, 1995, Ph.D. thesis, Universiteit Utrecht.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, LNM, **224**, Springer Verlag, 1971.

[SGA4] A. Grothendieck and J. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, LNM, **269**–**271**, Springer Verlag, 1972.

[T] W. Thurston, *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Princeton, 1978, `http://msri.org/publications/books/gt3m/`.

[V] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. math., **97**, 1989, 613–670.

[Z_1] V. Zoonekynd, *La tour de Teichmüller–Grothendieck*, 2001, thèse de doctorat, disponible en `http://www.institut.math.jussieu.fr/theses/2001/zoonekynd/`.

[Z_2] V. Zoonekynd, *The fundamental group of an algebraic stack*, en préparation.