La tour de Teichmüller–Grothendieck

Vincent Zoonekynd
zoonek@math.jussieu.fr

22 juin 2001

Voici le texte de ma soutenance de thèse, où j'expose, au niveau le plus élémentaire possible, les différents résultats que j'ai établis (ce sont ceux énoncés en gras, avec un filet double ondulé sur la gauche).

1 Introduction : sur la notion de champ algébrique

Il y a trois façons de voir un champ algébrique.

(i) De manière très intuitive, c'est l'analogue, en géométrie algébrique, des orbifolds, *i.e.*, c'est un « objet géométrique » qui « ressemble localement » à un schéma quotienté par l'action d'un groupe fini.

(ii) En particulier, un schéma quotienté par l'action d'un groupe fini peut être vu comme un champ algébrique ; plus généralement, on peut montrer que les champs algébriques sont exactement les quotients de (certains) groupoïdes étales.

(iii) Enfin, on peut voir un champ algébrique comme un pseudo-foncteur vérifiant certaines propriétés : nous allons maintenant détailler cette définition.

Les **problèmes de modules**, en géométrie algébrique, consistent à mettre une « structure géométrique » (souvent, une structure de schéma) sur un « ensemble » d'objets géométrique. Par exemple, l'ensemble des courbes lisses de genre g (pour un entier g fixé) sur $\mathbb{C}$ est juste un ensemble, on ne peut pas faire de géométrie dessus : des question comme « quelle est sa dimension ? » ou « est-il lisse ? » n'ont pas de sens. Comment transformer cet ensemble en un objet géométrique ?

Pour répondre à cette question, retournons-la : comment transformer un objet géométrique en un ensemble ? Par le plongement d'Yoneda : si X est un schéma sur $\mathbb{C}$, on peut lui associer le foncteur

$$\begin{cases} \mathfrak{Sch\acute{e}mas\ sur}\ \mathbb{C} & \longrightarrow \mathfrak{Ensembles} \\ T & \longmapsto \operatorname{Hom}(T,X). \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'une « famille d'ensembles » indexée par la catégorie des schémas – on dit d'ailleurs souvent que $\operatorname{Hom}(T,X)$ est l'ensemble des « points de X à valeurs dans T ».

Revenons maintenant à notre problème : on voudrait remplacer l'ensemble des courbes de genre g sur $\mathbb{C}$ par un foncteur. Il suffit d'associer à tout schéma T l'ensemble des (classes d'isomorphie de) familles de courbes au dessus de T. Notre question « comment faire de la géométrie sur l'ensemble des courbes » se reformule alors ainsi : « ce foncteur est-il de la forme $\operatorname{Hom}(\cdot,M)$ pour un certain schéma M » (on dit alors que ce foncteur est **représentable**) ?

La réponse est non en général, mais oui pour d'autres problèmes de modules de courbes (si on considère des courbes *lisses*, munies d'une structure supplémentaire, par exemple, la donnée d'un certain nombre de points dessus) : mais dans les situations où ça marche, le schéma M que l'on obtient n'est pas propre : on aimerait le compléter, par exemple en rajoutant les courbes singulières. Mais ça ne marche pas : on peut montrer que le foncteur ainsi obtenu n'est pas représentable. La démonstration de ce fait repose sur l'existence d'automorphismes non triviaux pour certaines courbes singulières. On peut donc penser que le problème vient du fait qu'en considérant les « courbes modulo isomorphie » on a oublié les automorphismes. Que se passe-t-il si on décide de les garder ?

Pour le savoir, considérons le « foncteur » qui à un schéma T associe la catégorie (ou le groupoïde – un **groupoïde** est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes) dont les objets sont les familles de courbes (non nécessairement lisses) de genre g sur $\mathbb{C}$ et dont les morphismes sont les isomorphismes. Remarquons au passage que les groupoïdes ne forment pas une catégorie mais plutôt une 2-catégorie (*i.e.*, on a des objets – les groupoïdes –, des 1-morphismes entre ces objets – les foncteurs –, et des 2-morphismes entre ces 1-morphismes – les transformations naturelles) et que notre « foncteur » n'en est pas un : il ne respecte la composition des morphismes qu'à 2-isomorphisme près : on dit que c'est un pseudo-foncteur.

Cette fois-ci, il n'y a aucun espoir que ce pseudo-foncteur soit représentable (il faudrait pour cela que l'on ait des ensembles et pas des groupoïdes et que ce soit un foncteur et pas simplement un pseudo-foncteur), mais on va quand même pouvoir faire de la géométrie dessus. Comment ? On va simplement se limiter à une partie de la 2-catégorie des pseudo-foncteurs vers la 2-catégorie des groupoïdes : celle des champs algébriques. Un **champ algébrique** est un pseudo-foncteur satisfaisant les propriétés suivantes.

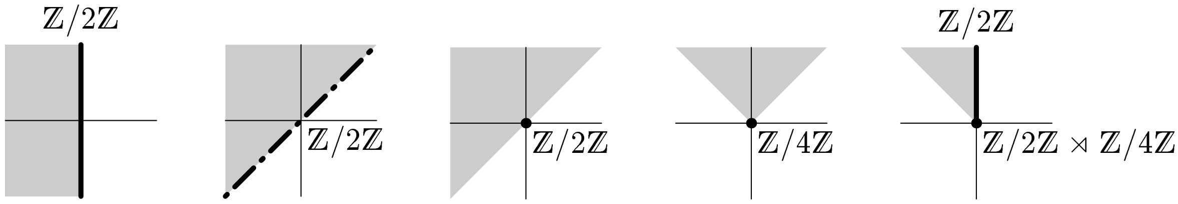
- (i) On demande qu'il vérifie des propriétés comparables à celles du foncteur associé à un schéma : celui-ci est un faisceau pour la topologie étale, on demandera que les champs algébriques soient des « 2-faisceaux » pour la topologie étale – on appelle ça des **champs**.
- (ii) On exige aussi quelques conditions techniques (que la diagonale soit représentable, quasi-compacte et non ramifiée) sur lesquelles je ne m'appesantis pas.
- (iii) Enfin, pour pouvoir faire de la géométrie dessus, on demande qu'un champ algébrique « ressemble localement » à un schéma : plus précisément, on demande qu'il existe un morphisme surjectif et étale depuis un schéma (les conditions techniques précédentes servent à dire ce qu'est un morphisme « surjectif et étale »).

Bien que cette définition soit effrayante, les remarques suivantes permettent de démontrer simplement divers résultats sur les champs algébriques.

- (i) Pour étudier un champ algébrique X, il suffit souvent de choisir un morphisme surjectif étale $U \twoheadrightarrow X$ depuis un schéma et de remplacer le champ X par le groupoïde $U \times_X U \rightrightarrows U$. Par exemple, la catégorie des faisceaux étales sur X est équivalente à la catégorie des faisceaux équivariants sur ce groupoïde [V].
- (ii) Si le champ algébrique est obtenu comme solution d'un problème de modules, il suffit souvent de l'étudier fibre par fibre : or les fibres sont alors des catégories de schémas, relativement simples à étudier.
- (iii) Si la plupart des raisonnements sur les schémas se généralisent sans grand changement aux champs algébriques, il faut prendre garde que les champs ne forment pas une catégorie mais une 2-catégorie : beaucoup des problèmes rencontrés viennent de là.

Donnons maintenant quelques exemples de champs. Tout d'abord un schéma est un champ (plus précisément : la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine (et 2-pleine) de celle des champs). Ensuite, le quotient d'un schéma par une action (quelconque) d'un groupe fini est un champ, en général différent du schéma quotient que l'on définit naturellement : on peut ainsi quotienter un point $*$ (le spectre d'un corps algébriquement clos) par un groupe fini G agissant trivialement : le quotient n'est pas un point ! Une présentation de ce quotient est par exemple $G \rightrightarrows *$, muni de sa structure de groupe. En particulier, on peut retrouver, à partir du quotient, par quel groupe on a quotienté (c'est général : dans un champ quotient X/G, on peut retrouver le stabilisateur de chaque point de X). On peut aussi remarquer que le groupe fondamental de ce quotient $*/G$ n'est autre que G.

Les figures suivantes donnent quelques exemples de champs quotients : le plan $\mathbb{A}^2$ muni d'un diviseur à croisements normaux, quotienté respectivement par une symétrie d'axe vertical, une symétrie d'axe en diagonale, une symétrie centrale, une rotation d'un quard de tour et le groupe du carré $\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{Z}/4$. Nous avons représenté en gris un domaine fondamental de l'action et en gras les points dont le stabilisateur est non trivial. On remarquera que dans certains cas, le diviseur à croisements normaux n'a qu'une seule composante irréductible.



2 Groupe fondamental d'un champ

Dans [SGA1], on définit le groupe fondamental d'un schéma X en montrant que la catégorie des revêtements étales de X est équivalente à la catégorie des ensembles finis munis d'une acction d'un groupe profini, uniquement déterminé (une fois un point-base choisi – nous laissons ce problème de côté pour l'instant, nous y reviendrons plus loin) : c'est ce groupe que l'on appelle **groupe fondamental**.

Ce résultat peut s'exprimer en termes de topos (je rappelle qu'un **topos** est simplement une catégorie de faisceaux, par exemple, la catégorie $\mathfrak{Ens}$ des ensembles est le topos des faisceaux sur le point) : la catégorie des sommes disjointes de revêtements étales de X est équivalente au topos des ensembles munis d'une action continue d'un groupe profini (on appelle cela le **topos classifiant** du groupe profini).

Avant de généraliser ces constructions aux champs algébriques, remarquons que l'on peut remplacer les revêtements étales par les faisceaux étales localement constants finis – cela permet d'éviter tous les problèmes dus au fait que les champs forment une 2-catégorie.

On peut définir le groupe fondamental profini d'un topos (connexe et localement connexe) $\mathscr{T}$ de la manière suivante [L] : La catégorie SLCF $\mathscr{T}$ des sommes disjointes d'objets localement constants finis de $\mathscr{T}$ est une 2-limite projective de topos classifiants de groupes finis, donc, c'est le topos classifiant d'un groupe profini.

Ce résultat s'applique aux champs algébriques.

Si X est un champ algébrique connexe, alors le topos $\mathfrak{Sh}\,X$ des faisceaux étales sur X est connexe et localement connexe : on peut donc définir son groupe fondamental $\widehat{\pi}_1(X,x)$.

Comme pour les schémas, à un champ algébrique X de type fini sur $\mathbb{C}$, on peut associer un « objet analytique ». Une manière de procéder consiste à choisir une présentation $R \rightrightarrows U$ de X : comme R et U sont des schémas, on peut prendre les espaces analytiques associés et obtenir un groupoïde analytique étale $R(\mathbb{C}) \rightrightarrows U(\mathbb{C})$. On peut voir ce groupoïde comme un orbifold [MP]. Comme dans le cas des schémas, cet orbifold a le même groupe fondamental *profini* que le champ dont on était parti.

Si X est un champ algébrique de type fini sur $\mathbb{C}$, $R \rightrightarrows U$ une présentation de X et $R(\mathbb{C}) \rightrightarrows U(CC)$ l'orbifold analytique associé, alors $\widehat{\pi}_1(X) \approx \widehat{\pi}_1\big(R(\mathbb{C}) \rightrightarrows U(\mathbb{C})\big)$.

Dans la littérature [O], on trouve une autre notion de groupe fondamental d'un champ algébrique (notons-le $\widehat{\pi}_1^{\mathrm{Oda}}$), définie de manière un peu plus technique à l'aide de schémas simpliciaux : on peut montrer que ces deux notions coïncident.

Si X est un champ algébrique, alors $\widehat{\pi}_1(X) \simeq \widehat{\pi}_1^{\mathbf{Oda}}(X)$.

La plupart des résultats connus pour le groupe fondamental d'un schéma restent vrais pour les champs : c'est le cas, par exemple, de la suite exacte reliant groupe fondamental, le groupe fondamental géométrique et le groupe de Galois.

Soient X un champ algébrique sur un corps k et $\bar{k}$ une clôture séparable de k. On a alors une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X \otimes_k \bar{k}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k} : k) \longrightarrow 1.$$

Voici une autre suite exacte, exprimant le groupe fondamental d'un champ quotient.

Soient X un schéma et G un groupe fini agissant sur X. Si on note X/G le* champ *quotient, on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X/G) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Nous avons défini le groupe fondamental d'un champ à l'aide des *faisceaux* étales localement constant finis et pas à l'aide des revêtements. On peut néanmoins le faire à l'aide des revêtements, *i.e.*, des morphismes de champs étales et finis [Z_2], mais cette tâche est compliquée par le fait que les champs algébriques forment, non pas une catégorie, mais une 2-catégorie.

La catégorie* SLCF $\mathfrak{Sh}\, X$ *des (sommes disjointes de) faisceaux étales localement constants finis sur un champ algébrique X est équivalente à la catégorie dont les objets sont les 1-morphismes étales finis de champs $f : Y \longrightarrow X$ et dont les morphismes $(Y, f) \longrightarrow (Y', f')$ sont les couples (h, α) où

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Leftarrow\alpha"] & & Y' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3 Points-bases tangenciels

Bien que nous l'ayons passé sous silence, pour définir le groupe fondamental d'un champ algébrique, il faut préalablement *choisir* un « point » de X. Il peut s'agir d'un point géométrique, *i.e.*, d'un morphisme $\operatorname{Spec} k \longrightarrow X$ où k est un corps séparablement clos ou plus généralement d'un « point-base ».

Un **point-base** d'un champ algébrique X est un morphisme de topos $f : \mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,X$. Il est entièrement déterminé par $f^* : \mathfrak{Rev}\,X \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, où $\mathfrak{Rev}\,X$ est la catégorie des faisceaux étales localement constants finis connexes de X.

Reste le problème du *choix* du point-base. On s'arrange généralement pour le choisir en respectant la symétrie de l'espace étudié : par exemple, si un groupe agit sur l'espace avec un unique point fixe, on prendra ce point fixe. Dans certains cas, on peut être amené à choisir plusieurs points-bases (s'il y a plusieurs points fixes, entre lesquels on ne peut pas choisir, ou s'il n'y a pas de point fixe, auquel cas on peut essayer de prendre une orbite entière) : il faut alors remplacer la notion de groupe fondamental par celle de **groupoïde fondamental**. Mais la situation peut être encore pire : ainsi, dans l'étude de la droite projective moins trois points $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$, sur laquelle agit le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, les points que l'on aimerait choisir sont justement ceux que l'on a enlevés : une solution consiste alors à prendre les points-bases « tangenciels » $\overrightarrow{01}$, $\overrightarrow{0\infty}$, $\overrightarrow{10}$, $\overrightarrow{1\infty}$, $\overrightarrow{\infty 0}$ et $\overrightarrow{\infty 1}$, *i.e.*, des points infiniment proches de 0, 1 et ∞ dans la direction indiquée. Cette notion est bien connue sur $\mathbb{C}$, et elle se généralise en caractéristique quelconque en remplaçant la catégorie $\mathfrak{Rev}\,X \setminus D$ des revêtements étales d'un schéma X privé d'un diviseur à croisements normaux D, par la catégorie $\mathfrak{Rev}^D X$ des revêtements de X modérément ramifiés en D.

Soient X un schéma normal sur un corps k, D un diviseur à croisements normaux et $x \in D$. Un système régulier de paramètres $(t_1, \ldots, t_n)$ définissant D induit des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathscr{O}}_{X,x} & \simeq & \kappa[\![t_1, \ldots, t_n]\!] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathscr{O}}_{D,x} & \simeq & \dfrac{\kappa[\![t_1, \ldots, t_n]\!]}{\langle t_1 t_2 \cdots t_m \rangle} \end{array}$$

et on note

$$\widetilde{\mathscr{O}}_{X,x} \simeq \kappa\{\{t_1, \ldots, t_n\}\}$$

l'anneau des séries de Puiseux. Alors le foncteur

$$f^* : \begin{cases} \mathfrak{Rev}^D X & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ R & \longmapsto \quad \mathrm{Hom}_{k(X)}\big(k(R), \mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathscr{O}}_{X,x}\big) \end{cases}$$

définit un point-base.

Ce résultat se généralise aussi aux champs algébriques.

Soient

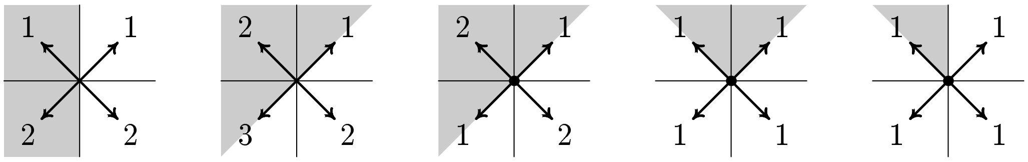
- ***X un champ algébrique,***
- ***D un diviseur à croisements normaux,***
- ***$x \in D$,***
- ***$U \twoheadrightarrow X$ un morphisme surjectif et étale depuis un schéma,***
- ***$y \in U$ un poit au dessus de x,***
- ***U_0 la composante connexe de U contenant y,***
- ***$(t_1, \ldots, t_n)$ un système régulier de paramètres en y, permettant de définir $\widetilde{\mathscr{O}}_{U,y}$.***

Alors le foncteur

$$f^* : \begin{cases} \mathfrak{Rev}^D X & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ R & \longmapsto \quad \coprod\limits_i \mathbf{Hom}_{k(U_0)}\big(k(R_i), \mathbf{Frac}\, \widetilde{\mathscr{O}}_{U,y}\big) \end{cases}$$

définit un point-base tangenciel, où les R_i désignent les composantes connexes de R_i, vu comme un revêtement de U_0 (il est connexe en tant que revêtement équivariant de U, mais a priori pas en tant que revêtement de U).

La figure suivante donne des exemples de points-bases tangenciels dans les cinq exemples prédédents de diviseurs à croisements normaux dans le plan (les nombres différents représentent des points-bases tangenciels « différents », *i.e.*, non canoniquement isomorphes).

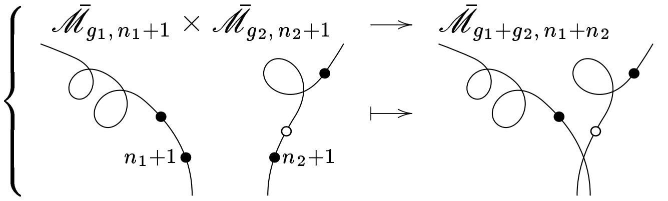


4 Espaces de modules de courbes

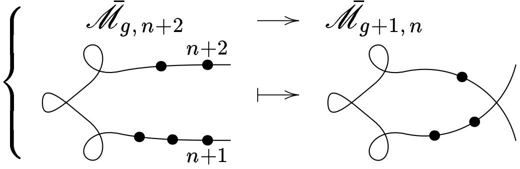
Notons

- $\mathscr{M}_{g,n}$ l'espace de modules des courbes lisses de genre g à n points marqués par $\{1, \ldots, n\}$;
- $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ l'espace de modules de courbes **stables** (*i.e.*, dont le groupe d'automorphismes est fini) de genre g à n points marqués ;
- $\mathscr{S}_{g,n}$ l'espace de modules de courbes stables singulières de genre g à n points marqués.

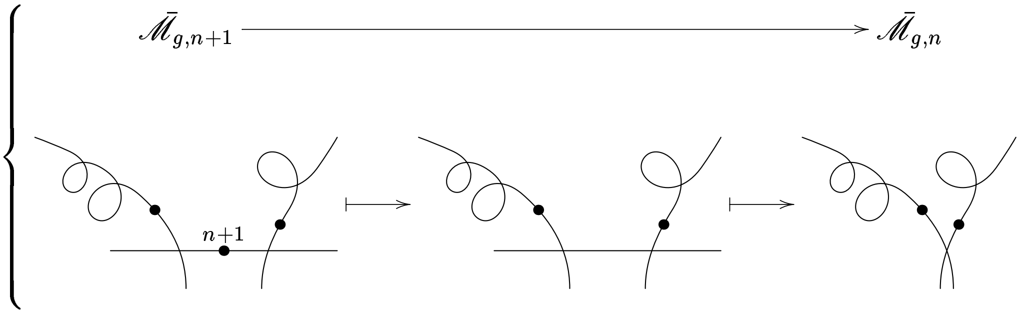
On sait [K] que $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ est un champ algébrique propre et lisse et que $\mathscr{S}_{g,n}$ est un diviseur à croisements normaux. Ces espaces de modules sont reliés par divers morphismes : les morphismes d'**accrochage**



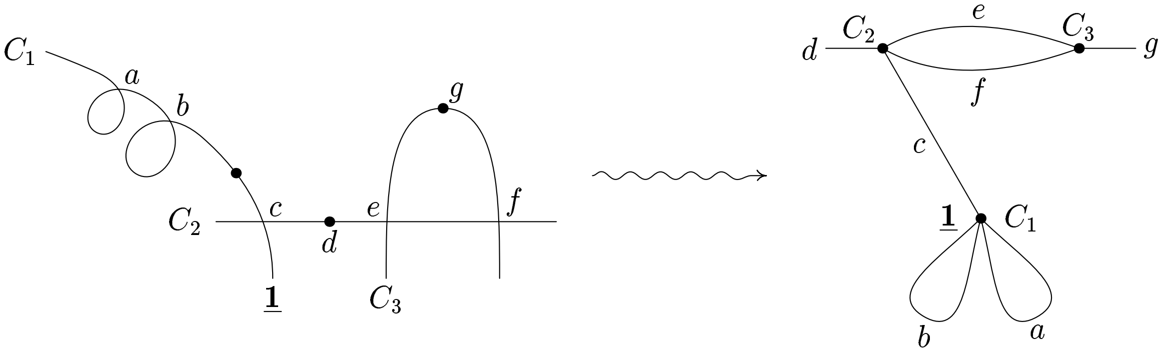
d'auto-accrochage



et d'oubli (si après avoir retiré un point, la courbe n'est plus stable, on contracte en un point la composante rationnelle incriminée)



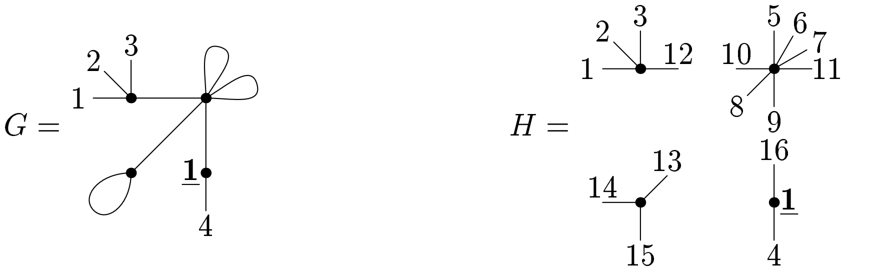
Le diviseur à croisements normaux $\mathscr{S}_{g,n}$ définit une stratification de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$, dite **stratification par le type topologique** (car deux courbes C et C' sont dans la même strate si et seulement si $C(\mathbb{C})$ et $C'(\mathbb{C})$ ont le même type topologique). On peut la décrire à l'aide de graphes de la manière suivante. À une courbe stable C on associe un graphe dont les sommets sont les composantes irréductibles de C (*i.e.*, les composantes connexes de sa normalisée $\widetilde{C}$), dont les arrêtes sont les points singuliers de C, dont les jambes sont les points marqués et dont chaque sommet est décoré d'un entier, le genre géométrique de la composante, comme sur le dessin suivant (l'entier souligné indique le genre géométrique de la composante, quand il n'est pas nul).



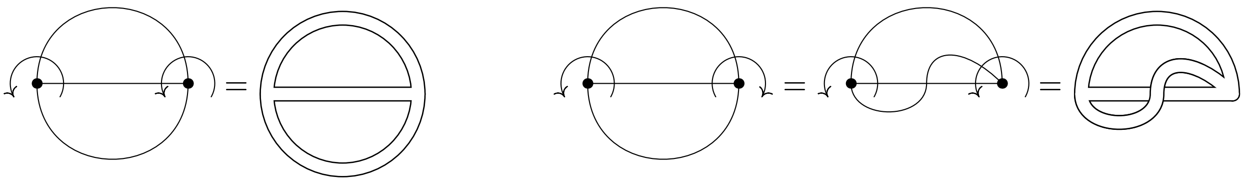
Si G est un graphe, nous noterons $\mathscr{M}_G$ l'espace de module des courbes dont le type topologique est décrit par G. En particulier, si G est un graphe sans arrêtes, $\mathscr{M}_G$ est un espace de modules de courbes lisses. Le résultat suivant, qui généralise [K, 3.9], décrit donc la structure des strates de la stratification par le type topologique à l'aide des espaces de modules de courbes lisses.

Soient G un graphe et H le graphe obtenu en coupant toutes les arrêtes. On a alors une équivalence de champs

$$\mathscr{M}_H / \operatorname{Aut} G \approx \mathscr{M}_G.$$



Un **graphe en rubans** est un graphe muni, en chacun de ses sommets, d'un ordre cyclique sur les demi-arrêtes qui en partent.



Un graphe trivalent en rubans définit un point-base tangenciel de $\mathscr{M}_{g,n}$ au point correspondant.

En effet, considérons une courbe stable dégénérée maximale C, *i.e.*, correspondant à une strate de dimension nulle, et le graphe G décrivant cette strate. Dire que la strate est de dimension nulle revient à dire que le graphe est trivalent ou encore que les composantes irréductibles de la courbe sont de genre géométrique nul. Un **point spécial** de C est un point de sa normalisée $\widetilde{C}$ au dessus d'un point marqué ou singulier : il y en a exactement trois dans chaque composante. Donnons-nous maintenant une structure de graphe en ruban sur G : cela permet d'obtenir, pour chaque composante, un ordre cyclique sur ses trois points spéciaux, donc des coordonnées locales au voisinage de chacune des singularités, donc des coordonnées sur la base de la déformation universelle des singularités de C, qui est canoniquement isomorphe à la base de la déformation universelle de C : cela nous donne des coordonnées (un « système régulier de paramètres ») dans l'espace tangent de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ au point correspondant à C et donc un point-base tangenciel. Cela généralise un résultat similaire de [IN], qui se limitait aux courbes sans aucune composante irréductible de genre arithmétique 1.

Signalons qu'au passage, nous avons obtenu une description de l'espace tangent de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ en C : contrairement au cas des schémas, l'espace tangent n'est pas simplement un espace vectoriel, mais un espace vectoriel muni d'une action du groupe du point. Dans notre situation, on peut décrire l'action de $\operatorname{Aut} C \simeq \operatorname{Aut} G$ de manière combinatoire, à l'aide de graphes.

Références

[D] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Y. Ihara, K. Ribet and J.-P. Serre editors, Mathematical Sciences Research Institute Publications 16, Springer Verlag, 1987, 79–298.

[IN] Y. Ihara and H. Nakamura, *On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem*, J. Reine Angew. Math., **487**, 1997, 125–151.

[K] F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable surves II : the stacks* $M_{g,n}$, Math. Scand., **52**, 1983, 161–199.

[L] O. Leroy, *Groupoïde fondamental et théorème de Van Kampen dans les topos*, Cahiers mathématiques de l'université de Montpelier, 1979.

[MP] I. Moerdijk and D. Pronk, *Orbifolds, sheaves and groupoids*, K-theory, **12**, 1997, 3–21.

[O] T. Oda, *Étale homotopy type of the moduli space of algebraic curves*, in *Geometric Galois Actions*, L. Schneps and P. Lochak editors, London Mathematical Society Lecture Note Series, **242**, Cambridge University Press, 1997, 85–95.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, **224**, Springer Verlag, 1971.

[V] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. math., **97**, 1989, 613–670.

[Z_1] V. Zoonekynd, *The fundamental group of an algebraic stack*, en préparation.

[Z_2] V. Zoonekynd, *Théorème de Van Kampen pour les champs*, 2001, disponible en `http://www.math.jussieu.fr/~zoonek/Ecrits`.

[Z_3] V. Zoonekynd, *Tangencial base points on algebraic stacks*, en préparation.