Contrôle 2 — 29 Avril 2002 — Groupe B

Temps alloué : 40 minutes.
Calculatrices, téléphones et documents interdits.

Exercice 1

Pour quelles valeurs de m la matrice suivante est-elle inversible ? (On ne demande pas de calculer son inverse.)

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & m \\ m & m^2 & -1 & m^3 \\ m^2 & 1 & 0 & m^3 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Quel est son polynôme caractéristique ? Quelles sont ses valeurs propres ?

b. Déterminer une base des sous-espaces propres $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ AX = \lambda X\}$ pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 4$.

c. Diagonaliser A, *i.e.*, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3

On note $\mathscr{M}_2$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2. On admet que

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

en est une base.
On considère l'application (on admet qu'elle est linéaire)

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2 \\ A & \longmapsto & A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Quelle est sa matrice dans la base $\mathscr{B}$?